Die Mondentfernung

(mit Lösungen)

1 Einleitung

Als Aristarch versuchte, die Sonnenentfernung aus der Stellung von Sonne und Mond bei Halbmond abzuleiten ([2]), kannte er bereits einen recht guten Wert für die Entfernung des Mondes ([1]). Diese Entfernung war nicht aus einer Parallaxenmessung abgeleitet worden. Dazu waren die Messmethoden nicht genau genug: Der am Mond maximal zu messende Parallaxenwinkel beträgt[1] 2°, ist aber auf dem den Griechen damals zugänglichen Teil der Erde wesentlich kleiner.

Die Entfernung des Mondes war aus Beobachtungen von Mondfinsternissen abgeleitet worden. Dieses Verfahren ist einfach zu verstehen und soll hier anhand eines Mondfinsternisfotos nachvollzogen werden.

2 Etwas Theorie

Die Beobachtung einer Mondfinsternis offenbart nicht nur die Kugelgestalt der Erde, sie macht es auch möglich, die Größe des Mondes abzuschätzen und zu einem recht genauen Wert für die Mondentfernung zu kommen.

Nimmt man zunächst vereinfachend an, das Sonnenlicht sei wegen der großen Entfernung der Sonne parallel, der Kernschatten der Erde also immer ebenso groß wie die Erde selbst, dann zeigt eine Mondfinsternis *direkt* das Größenverhältnis zwischen Erde und Mond. Da diese Annahme aber nicht zutreffend ist (man erkennt es daran, dass die Sonne am Himmel nicht punktförmig erscheint und Schatten im Sonnenlicht nicht scharf begrenzt sind!), überschätzt man auf diese Weise die Größe des Mondes und damit auch die Mondentfernung, wenn man die scheinbare Mondgröße heranzieht.

Der Kernschatten der Erde ist also im Abstand des Mondes von der Erde *kleiner* als die Erde. Um zu einer besseren Abschätzung zu kommen, muss man deshalb die Winkelverhältnisse bei einer Mondfinsternis genauer untersuchen:

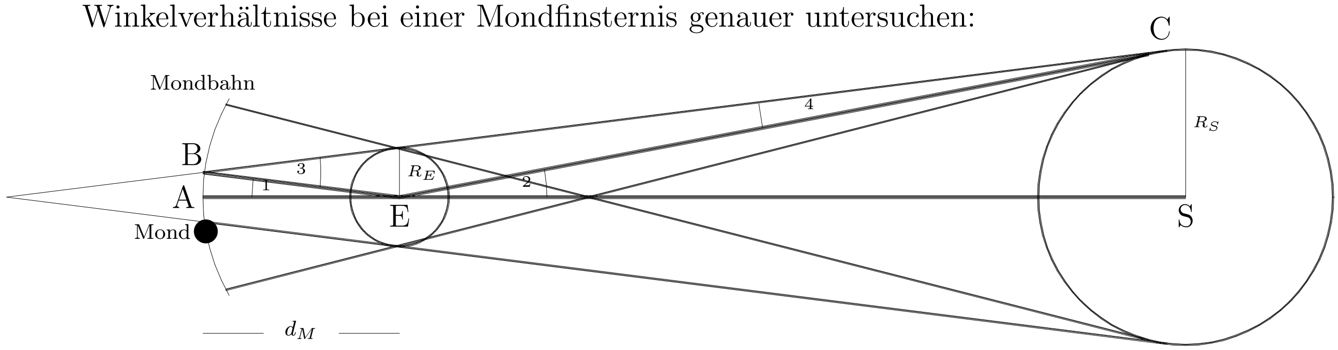


Abbildung 1: Winkel bei einer Mondfinsternis[2]. Die Winkel 1-4 werden in Abbildung 2 korrekt bezeichnet.

[1]Das kann man folgendermaßen einsehen: Der Mond erscheint uns unter einem Winkel von etwa 0.5°. Die Erde ist etwa viermal so groß, erscheint also einem Astronauten auf dem Mond unter einem Winkel von etwa 2°. Das ist aber gerade der maximal mögliche Parallaxenwinkel.

[2]An den eingezeichneten Radien erkennt man, dass diese Zeichnung nur näherungsweise korrekt ist. Die Näherungen sind allerdings sehr gut, weil die tatsächlich auftretenden Winkel kleiner als 1° sind.

Der Winkel 1 in Abb. 1 ist der Winkel, unter dem der Radius des Kernschattens von der Erde aus erscheint, d.i. der **Winkelradius $\boldsymbol{r_{KS}}$** des Kernschattens. Winkel 2 ist offensichtlich der **Winkelradius $\boldsymbol{r_S}$** der Sonne. Winkel 3 ist der Winkel, unter dem der Erdradius von der Mondbahn aus erscheint. Das ist aber gerade die Definition der **Mondparallaxe $\boldsymbol{\pi_M}$**. Entsprechend ist Winkel 4 die **Sonnenparallaxe $\boldsymbol{\pi_S}$**.

Zur Ableitung der sogenannten Finsternisgleichung ist der entscheidende Teil der Abb. 1 in Abb. 2 vergrößert dargestellt.

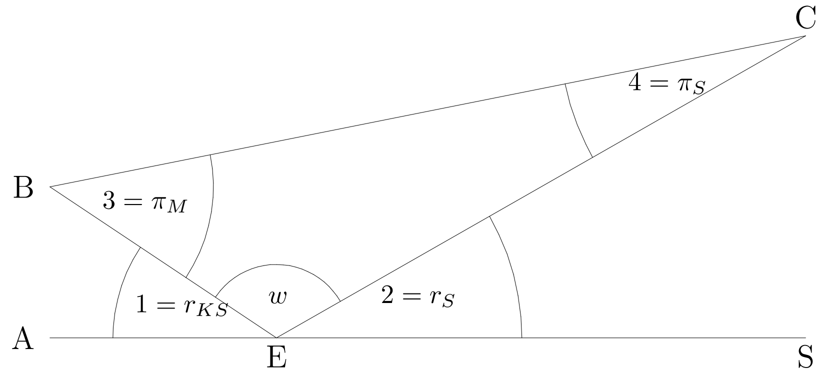


Abbildung 2: Zur Ableitung der Finsternisgleichung

Diese Darstellung macht deutlich, dass folgende Beziehung zwischen den auftretenden Winkeln besteht:

$$\pi_M + \pi_S = r_S + r_{KS} \qquad (\text{ Finsternisgleichung }) \tag{1}$$

Beide Winkelsummen ergänzen nämlich den Winkel w zu 180°. Bei Sonnenfinsternissen kann man beobachten, dass Sonne und Mond am Himmel recht genau gleich groß erscheinen, der **Winkelradius $\boldsymbol{r_M}$** des Mondes also ebenso groß ist wie der der Sonne. Man kann also setzen

$$r_S \approx r_M .$$

Darüberhinaus ist die Sonne viel weiter entfernt als der Mond. Man kann es bereits mit bloßen Augen an den Mondphasen erkennen: Bei Halbmond ist die Winkeldistanz zwischen Sonne und Mond *sehr* nahe bei 90° ([2]). Die Sonnenparallaxe muss also sehr viel kleiner als die Mondparallaxe sein:

$$\pi_S \ll \pi_M$$

Damit wird aus Gleichung (1):

$$\pi_M = r_M + r_{KS} = r_M \left(1 + \frac{r_{KS}}{r_M}\right) \tag{2}$$

Den Winkelradius von Sonne und Mond kann man z.B. mit einer Lochkameraabbildung oder durch Ausmessen des Bildes auf einem fotografischen Film (bei bekannter Brennweite) messen. Der Winkelradius des Mondes beträgt im Mittel 0.26°. Er variiert allerdings zwischen 0.245 und 0.279°. Damit wird aus (2) schließlich:

$$\boldsymbol{\pi_M \approx 0.26^\circ \left(1 + \frac{r_{KS}}{r_M}\right).} \tag{3}$$

Man kann also die Mondparallaxe bestimmen, wenn man bei Mondfinsternis – am besten, wenn der Mond etwa zur Hälfte in den Kernschatten der Erde eingetaucht ist – misst, wieviel mal größer der Kernschatten ist als der Mond selbst.

Der Zusammenhang zwischen Mondparallaxe, Mondentfernung d_M und Erdradius R_E ist aber nach Abb. 1 offensichtlich

$$\sin \pi_M = \frac{R_E}{d_M}.$$

Wenn man π_M im Bogenmaß angibt, kann man, da die Parallaxe offensichtlich ein kleiner Winkel ist, den Sinus durch die Parallaxe selbst ersetzen. Damit erhält man schließlich

$$\boldsymbol{d_M = \frac{R_E}{\sin \pi_M} \approx \frac{1}{\pi_M} R_E} \tag{4}$$

und kann auf diese Weise die Mondentfernung als Vielfaches des Erdradius berechnen.

Die Entfernung des Mondes von der Erde ist nicht konstant. Man kann es daran erkennen, dass der Mond am Himmel unterschiedlich groß erscheint, sein Winkelradius r_M sich also verändert, obwohl der **tatsächliche Mondradius $\boldsymbol{R_M}$** natürlich konstant ist. Da r_M ein kleiner Winkel ist, sind scheinbare Größe und Abstand umgekehrt proportional zueinander:

$$\sin r_M = \frac{R_M}{d_M} \quad \Longrightarrow \quad d_M \sim \frac{1}{r_M} \tag{5}$$

Die Bahn des Mondes ist näherungsweise eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Erde steht. Diese Ellipse unterscheidet sich kaum von einem exzentrischen Kreis, einem Kreis also, dessen Mittelpunkt nicht mit dem Erdmittelpunkt übereinstimmt.

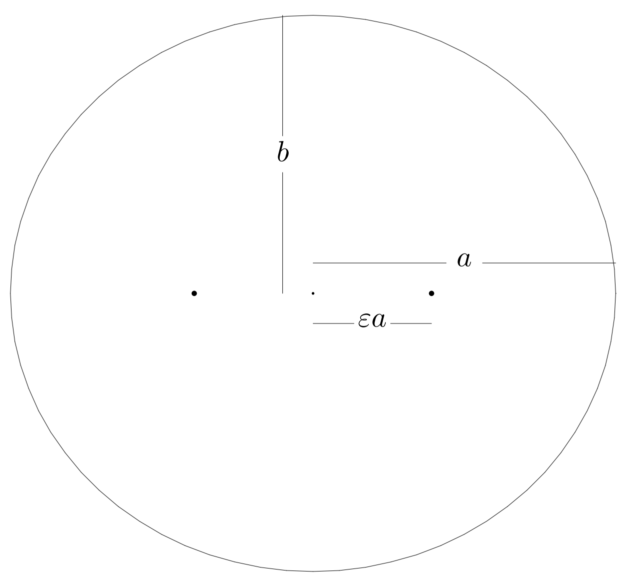


Abbildung 3: Bestimmungsgrößen einer Ellipse

Form und Größe einer Ellipse werden durch große und kleine Halbachse a und b beschrieben oder durch die große Halbachse a und die sogenannte **numerische Exzentrizität** ε, die definiert ist als Verhältnis zwischen der Entfernung zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt und der großen Halbachse. Zwischen a, b und ε bestehen die folgenden Beziehungen:

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \qquad \text{oder} \qquad \varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \tag{6}$$

Bestimmt man also den größten und den kleinsten Winkeldurchmesser des Mondes am Himmel, dann lässt sich daraus die Exzentrizität der Mondbahn ableiten.

3 benötigte Hilfsmittel

- Foto des partiell verfinsterten Mondes (Abb. 1),
- Folie mit Kreisschablonen (S. 8),
- Foto mit Kombination verschieden großer Halbmonde (Abb. 2),
- einfacher Taschenrechner.
- Für die Auswertung am Computer zusätzlich
  - die Fotos als jpg-Files und
  - das Programm `evaltransitpicts.exe`

Literatur

[1] D. B. Herrmann, *Kosmische Weiten, Johann Ambrosius Barth: Leipzig 1977*

[2] D. Vornholz, U. Backhaus: *Wer hat recht – Aristarch oder der Sextant?*, Astronomie und Raumfahrt 31, 20 (1994)

[3] Diaserie „Astronomie kompakt“, Baader Planetarium: Mammendorf 1989, Nr. 24

Abbildung 1: Der Eintritt des Mondes in den Erdschatten

4 Aufgaben (mit Lösungen)

1. **Mond- und Erdschattengröße**

   Das beiliegende Foto (Abb. 1) zeigt den Beginn einer totalen Mondfinsternis. Bestimme den scheinbaren Radius von Mond und Erdschatten so genau wie möglich dadurch, dass du

   - entweder von den auf die Folie gezeichneten Kreisen diejenigen heraussuchst, die sich am besten an die Krümmung anpassen (Da du nur das *Verhältnis* der Radien benötigst, kannst du statt der Winkelradien auch die Radien auf dem Bild benutzen!)
   - oder die Radien am Computer mit dem Programm `evaltransitpicts.exe`[3] ausmisst.

$$\frac{r_{KS}}{r_M} = \frac{139mm}{48.5mm} = 2.87$$

[3]Das Programm wurde ursprünglich zur Auswertung von Bildern des Venustransits 2004 entwickelt. Es kann verwendet werden, indem man angibt zwei Sonnenbilder ausmessen zu wollen, und dann zwei Kreise an den Mond und an der Erdschatten anpasst. Danach kann das Programm beendet werden.

2. **vereinfachte Abschätzung der Mondentfernung**

   Schätze aus diesem Ergebnis die Mondentfernung unter der vereinfachenden Annahme ab, der Kernschatten sei ebenso groß wie die Erde und der Winkelradius des Mondes betrage 0.26°.

$$\tan r_M = \frac{R_M}{d_M} \quad \Longrightarrow \quad d_M = \frac{1}{r_M} R_M = \frac{180°}{0.26°\pi} \frac{r_M}{r_{KS}} R_E = 77 R_E$$

3. **verbesserte Bestimmung der Mondentfernung**

   (a) Bestimme mit Hilfe der Finsternisgleichung (3) die Mondparallaxe π_M und daraus mit Hilfe von (4) die Mondentfernung als Vielfaches des Erdradius!

$$\pi_M = 0.26°(1 + 2.87) = 1.01°, \;\; d_M = \frac{R_E}{\pi_M} = 57.0 R_E$$

   (b) Tatsächlich betrug der Winkelradius des Mondes zur Zeit der Aufnahme 0.253°. Vergleiche die sich daraus ergebende Mondentfernung mit dem tatsächlichen Wert $d_M = 61.6 R_E$!

$$\pi_M = 0.98°, \;\; d_M = 58.3 R_E$$

4. **Exzentrizität der Mondbahn**

   Das zweite beiliegende Foto (Abb. 2, P. Parviainen [3]) zeigt den Vergleich zweier Vollmondbilder, die *etwa* bei Erdnähe (Perigäum) und Erdferne (Apogäum) aufgenommen wurden.

   (a) Miss die beiden scheinbaren Monddurchmesser aus, und schätze daraus die Exzentrizität der Mondbahn ab (Literaturwert: $\varepsilon = 0.0549$)!

$$\frac{a(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)} = \frac{r_{M_1}}{r_{M_2}} = \frac{116mm}{105.5mm} = 1.10 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{r_{M_1} - r_{M_2}}{r_{M_1} + r_{M_2}} = \frac{\frac{r_{M_1}}{r_{M_2}} - 1}{\frac{R_{M_1}}{r_{M_2}} + 1} = 0.0474$$

   (b) Wie groß ist also der Unterschied zwischen größter und kleinster Mondentfernung ungefähr (Literaturwert: 50000km)?

$$\Delta d_M \approx d_M(1+\varepsilon) - d_M(1-\varepsilon) = 2 d_M \varepsilon \approx 5.7 R_E \approx 36000km$$

   (c) Wie weit ist also der Mittelpunkt der Mondbahn vom Erdmittelpunkt entfernt?

$$d(M_{Erde}, M_{Mondbahn}) = \varepsilon a = 18000km$$

   (d) Wie stark unterscheidet sich die Mondbahn von einem Kreis, wie groß ist also die Differenz zwischen großer und kleiner Halbachse der Mondbahn?

$$a - b = a(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) \approx \frac{a}{2}\varepsilon^2 \approx 0.001a \approx 400km$$

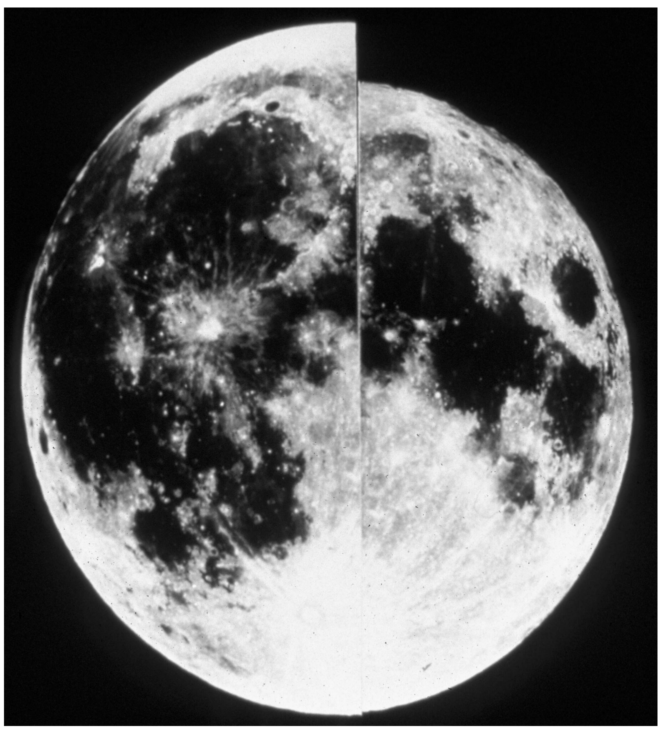
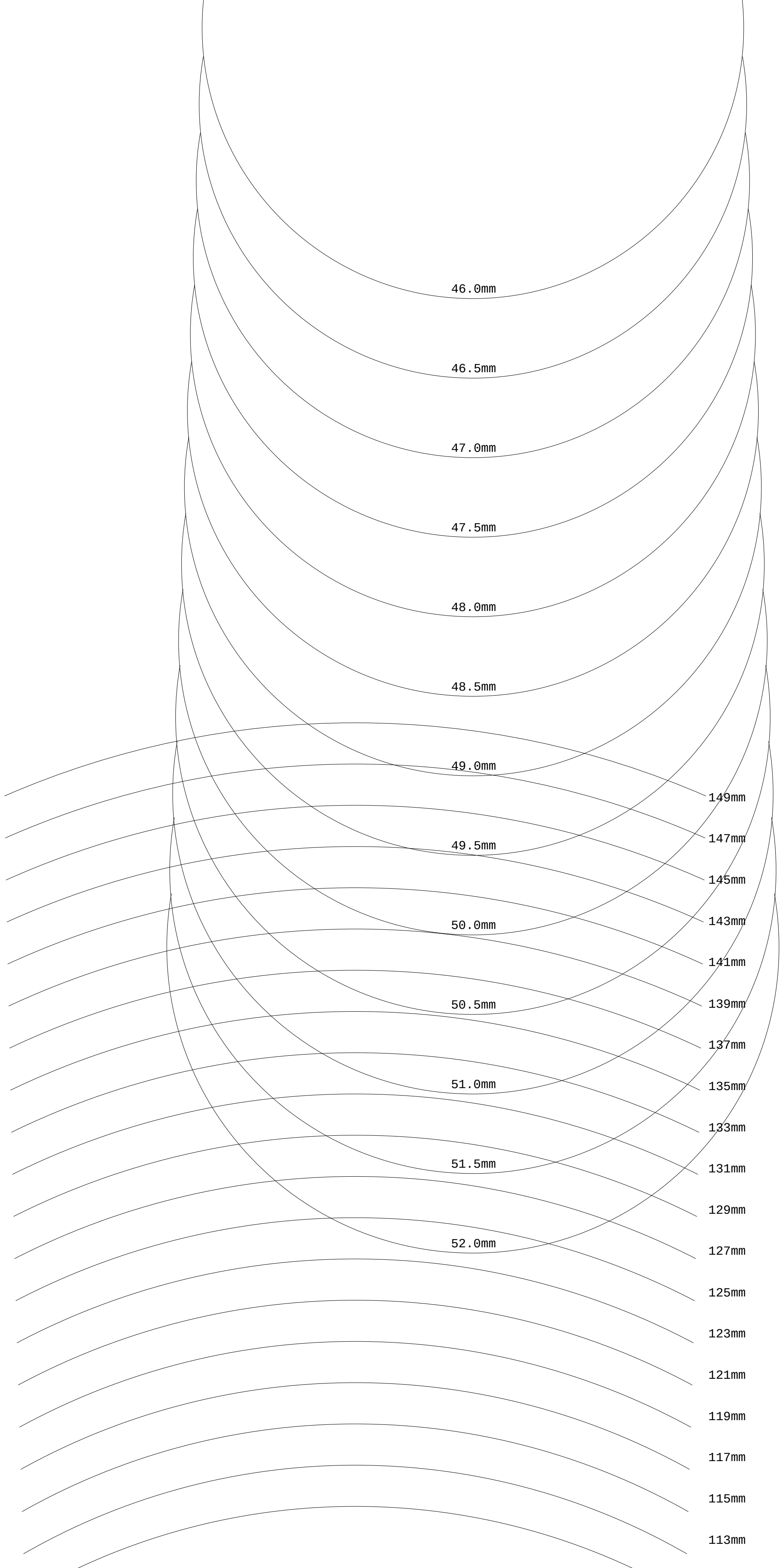


Abbildung 2: Vergleich der scheinbaren Mondgröße bei Erdnähe und Erdferne


46.0mm
46.5mm
47.0mm
47.5mm
48.0mm
48.5mm
49.0mm
49.5mm
50.0mm
50.5mm
51.0mm
51.5mm
52.0mm
149mm
147mm
145mm
143mm
141mm
139mm
137mm
135mm
133mm
131mm
129mm
127mm
125mm
123mm
121mm
119mm
117mm
115mm
113mm
111mm