

Die Marsbahn

(mit Lösungen)

1 Einleitung

Planeten fallen durch ihre große und veränderliche Helligkeit und durch ihre Bewegung vor dem unveränderlichen Hintergrund der Fixsterne auf. Verfolgt man sie über längere Zeit, dann stellt man fest, dass sie sich meist ungefähr „geradlinig“ (d.h. auf einem Großkreis) von West nach Ost (*rechtläufig*) bewegen. Manchmal aber beginnen sie zu zögern, werden immer langsamer und setzen schließlich ihre Wanderung in der entgegengesetzten Richtung fort (sie werden *rüchläufig*) – nur um einige Zeit später abermals umzukehren. Während dieser Zeit der Rückläufigkeit erreichen sie ihre größte Helligkeit. Diese Wanderung kann am leichtesten verfolgt werden, wenn helle Sterne in der Nähe sind. Abbildung 1 zeigt die Schleifen, die Mars in den letzten Jahren gezogen hat.

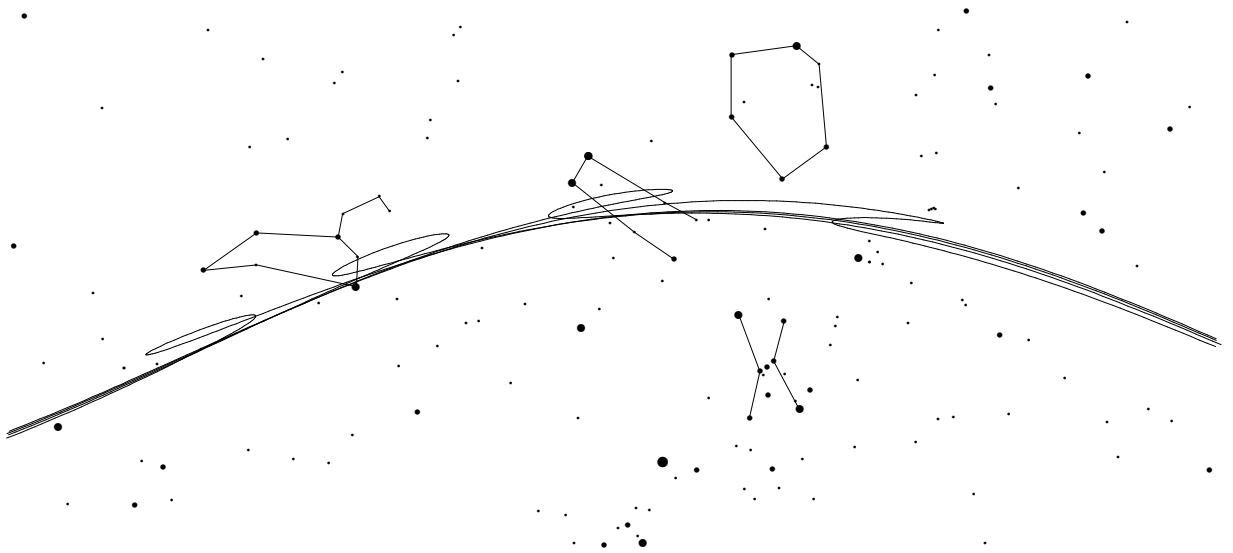


Abbildung 1: Marsschleifen 1990-1997 in den Sternbildern Stier, Zwillinge und Löwe

Die Schleifenbewegung entsteht dadurch, dass wir die Planeten von der ebenfalls sich bewegenden Erde aus beobachten: Während des Überholvorganges scheint sich der Planet in der entgegengesetzten Richtung zu bewegen. Dieser *Parallaxeneffekt* kann dazu benutzt werden, die Entfernung des Planeten von der Erde und damit seinen Abstand von der Sonne zu bestimmen.

In dieser Übung soll am Beispiel von Mars nachvollzogen werden, wie aus der Bewegung während der Rückläufigkeit der Bahnradius abgeleitet werden kann. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass *die Planeten die Sonne gleichförmig auf konzentrischen Kreisbahnen umlaufen, die alle in der Ebene der Ekliptik liegen*¹. In einem verfeinernden Schritt wird anschließend die Neigung der Marsbahn gegen die Ekliptik berücksichtigt. Die Bestimmung der Exzentrizität der Marsbahn wird an anderen Stellen ([3], [4]) beschrieben. Aber auch ohne das ergibt sich bereits eine recht befriedigende Beschreibung der Marsbewegung inklusive der Gestalt seiner Oppositionsschleifen (s. Abb. 2). Der Grund dafür ist die *sehr* geringe Abweichung der Marsbahn von der Kreisform (siehe z.B. [2]).

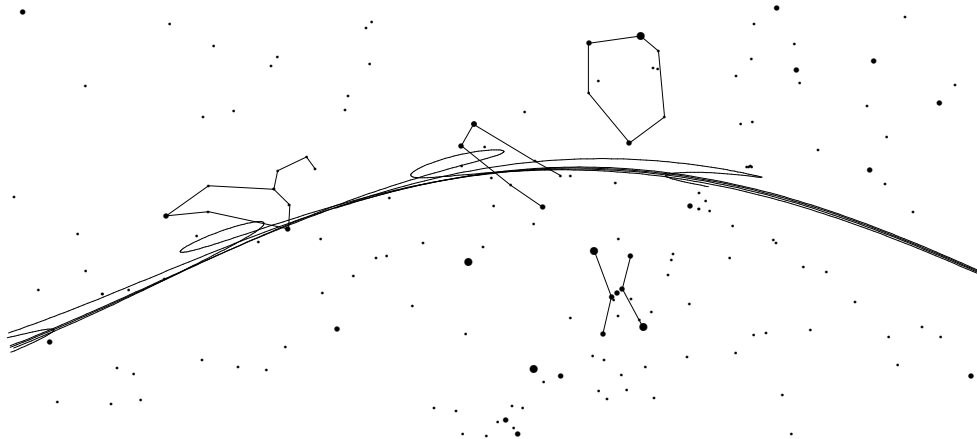


Abbildung 2: Mit den Vereinfachungen dieser Übung berechnete Marsbewegung 1990-1997

Die Beobachtungen können ähnlich auch an Venus und Jupiter durchgeführt werden. Statt der fotografischen Positionsbestimmung können auch Fernglasbeobachtungen herangezogen werden ([1]).

¹Mit Ausnahme von Pluto erfüllen alle Planeten diese Annahmen recht gut. Da die Marsbahn allerdings die größte Exzentrizität aufweist, treten Abweichungen bei den Ergebnissen dieses Versuches deutlicher als z.B. bei Venus und Jupiter in Erscheinung.

2 Etwas Theorie

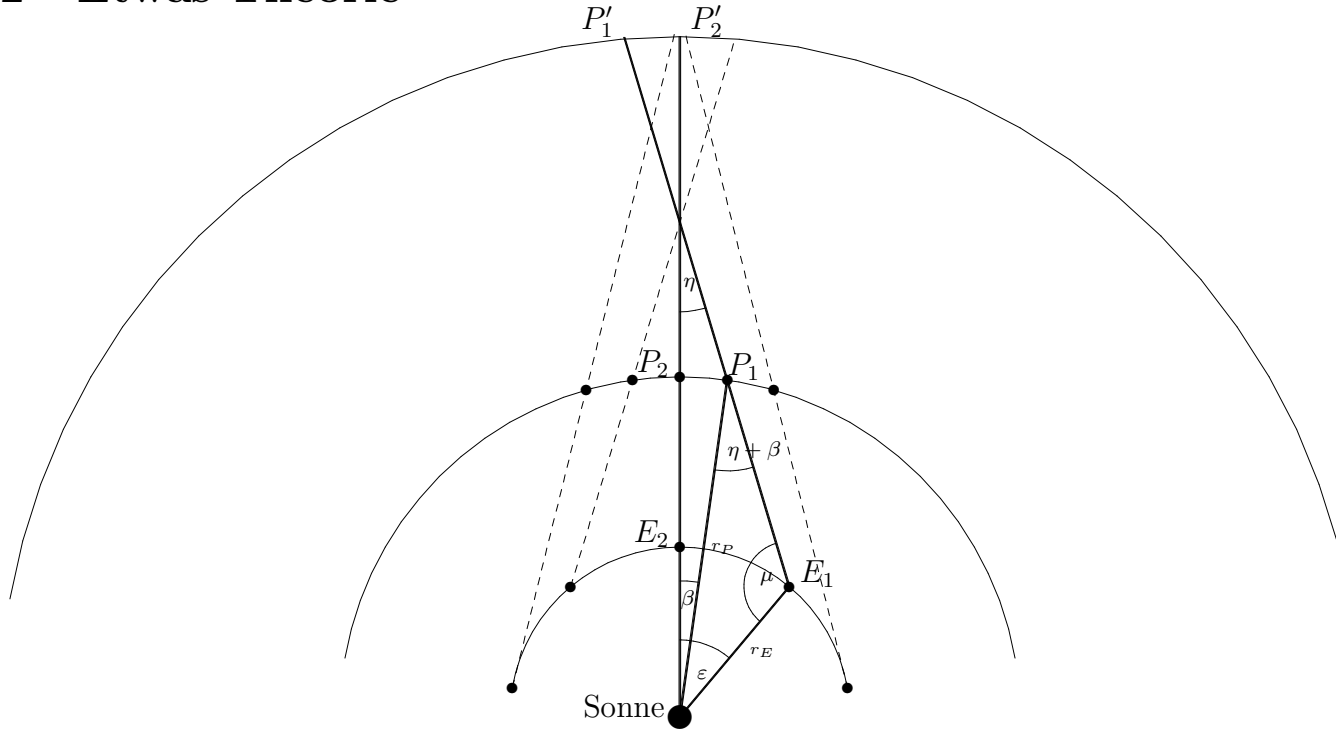


Abbildung 3: Winkelverhältnisse während der Rückläufigkeit

Abb. 3 zeigt die rückläufige scheinbare Bewegung $P'_1P'_2$ eines äußeren Planeten P während er durch die Erde E überholt wird. Dabei ist P'_2 die Position des Planeten am Tage seiner Opposition. Von den eingezeichneten Winkeln kann nur die scheinbare Verschiebung η des Planeten am Himmel direkt gemessen werden. Die zugehörigen Zentralwinkel ε und β können jedoch berechnet werden, wenn die siderischen Umlaufzeiten von Erde und Planet bekannt sind.

Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck SE_1P_1 ergibt für den Winkelabstand μ zwischen Mars und Sonne:

$$\frac{r_P}{r_E} = \frac{\sin \mu}{\sin(\beta + \eta)} \xrightarrow{\mu + \varepsilon + \eta = 180^\circ} r_P = \frac{\sin(\varepsilon + \eta)}{\sin(\beta + \eta)} r_E \quad (1)$$

Der Radius der Planetenbahn kann also berechnet werden, wenn die Position des Planeten *am Tage seiner Opposition* und an einem zusätzlichen Tage *während seiner Rückläufigkeit* bekannt sind. Wenn der Planet bei Opposition unbeobachtbar war, kann seine Position z.B. durch Interpolation gewonnen werden (siehe auch [1]).

Mit Abbildung 3 kann nur die Rückläufigkeit des Planeten erklärt, nicht aber die Gestalt der Oppositionsschleife beschrieben werden, die auf der Neigung der beiden Bahnebenen gegeneinander beruht. Zur Bestimmung der Bahnneigung i muss zusätzlich der Zeitpunkt des letzten Knotendurchganges bekannt sein (Abb. 4):

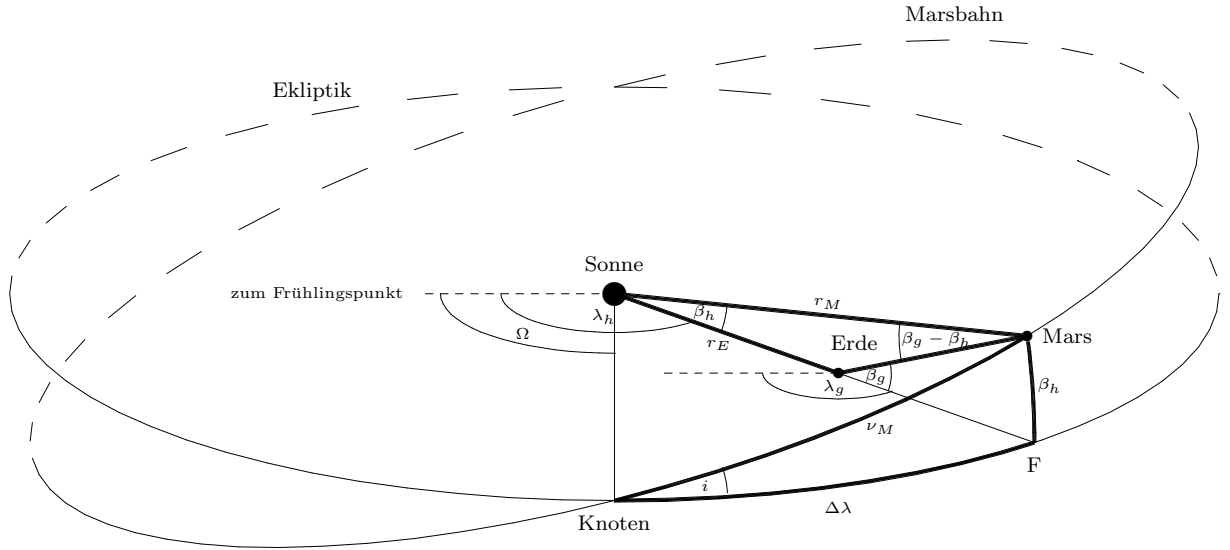


Abbildung 4: Zur Bestimmung der Neigung i der Marsbahn

Zunächst bestimmt man die *geozentrisch* ekliptikalen Koordinaten (λ_g, β_g) der Oppositionsposition und aus ihnen mit Hilfe des Sinussatzes für das Dreieck Sonne - Erde - Mars die *heliozentrisch* ekliptikalen Koordinaten (λ_h, β_h) :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\beta_g - \beta_h)}{r_E} &= \frac{\sin(180^\circ - \beta_g)}{r_M} \implies \sin(\beta_g - \beta_h) = \frac{\sin \beta_g}{r_M} r_E \\ &\implies \beta_h = \beta_g - \arcsin\left(\frac{\sin \beta_g}{r_M} r_E\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Anwendung des Sinussatzes auf das sphärische Dreieck Knoten - F - Mars ergibt dann die gesuchte Bahnneigung i :

$$\frac{\sin \beta_h}{\sin i} = \frac{\sin \nu_M}{\sin 90^\circ} \implies \sin i = \frac{\sin \beta_h}{\sin \nu_M} \quad (3)$$

Dabei ist ν_M die wahre Anomalie des Mars, der Winkel also, den Mars seit dem Knotendurchgang in seiner Bahnebene zurückgelegt hat. Aufgrund der Annahme eines gleichförmigen Umlaufes lässt sich die Anomalie leicht aus der zwischenzeitlich vergangenen Zeit berechnen. Die Berechnung der Knotenlänge Ω kann man der Abbildung direkt entnehmen:

$$\Omega = \lambda_h - \Delta\lambda = \lambda_g - \Delta\lambda \quad (4)$$

Die sich mit den Ergebnissen dieser Übung aufgrund gleichförmiger konzentrischer Kreisbahnbewegungen von Erde und Mars ergebende scheinbare Marsbewegung zeigt Abb. 2.

3 benötigte Hilfsmittel

- 6 Himmelfotos bzw. entspr. Fotokopien,
- Himmelskarte auf Folie,
- 1 wasserlöslicher Folienschreiber,
- Zirkel,
- Geodreieck,
- wissenschaftlicher Taschenrechner.

Literatur

- [1] U. Backhaus, *Bestimmung der Radien von Planetenbahnen mit Fernglas und Sternkarte*, Praxis der Naturwissenschaften 39/5, 10 (1990)
- [2] U. Backhaus, *Beobachtung und Interpretation von Planetenbewegungen*, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 45/8, 483 (1992)
- [3] O. Gingerich, *Laboratory Exercises in Astronomy: The Orbit of Mars*, Sky & Telescope 26/4, 300 (1983)
- [4] U. Klinger, *Die Bestimmung der Marsbahn nach Johannes Kepler – ein graphisches Verfahren*, Vorträge der DPG, Duisburg 1995, S. 110
- [5] W. Tirion, *Sky Atlas 2000.0*, Sky Publishing, Cambridge 1982

4 Aufgaben (mit Lösungen)

Im folgenden wird vereinfachend angenommen, dass Erde und Mars *gleichförmig auf konzentrischen Kreisen um die Sonne* laufen. Zunächst wird darüberhinaus vorausgesetzt, dass *Marsbahn und Erdbahn in derselben Ebene* liegen.

1. Die siderische Umlaufzeit von Mars

Die letzten Marsoppositionen fielen auf den **7. Januar 1993**, den **11. Februar 1995** und den **17. März 1997** (Wie kann man das feststellen?). Aus diesen Angaben soll zunächst die **siderische Umlaufzeit T_{sid}** von Mars abgeleitet werden.

Trage dazu in die folgende Abbildung die Positionen von Erde und Mars für die drei Oppositionszeitpunkte ein. Zur Hilfe dienen die folgenden Teilaufgaben:

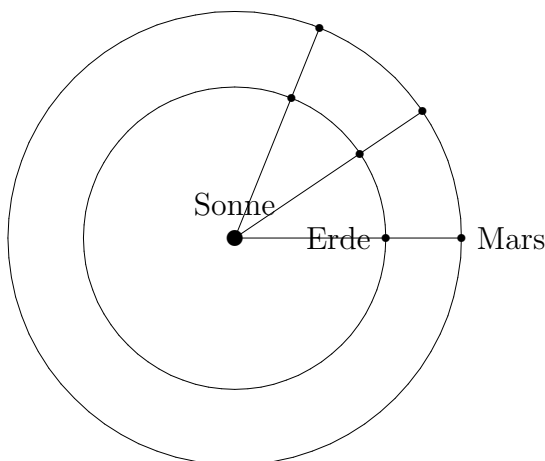


Abbildung 3: Sonne und Erde am 7. Januar 1993

- (a) Wie groß ist die **mittlere Winkelgeschwindigkeit μ_E** der Erde, d.h. die Geschwindigkeit, mit der der Leitstrahl Sonne-Erde umläuft?

$$\mu_E = \frac{360^\circ}{365.25d} = 0.986^\circ/d$$

- (b) Welche Abschätzung für die **synodische Umlaufzeit T_{syn}** ² von Mars ergibt sich aus oben angegebenen Oppositionsdaten (Literaturwert: $T_{syn} = 780$ Tage)³?

$$T_{syn} = 765 \text{ Tage}$$

²Die synodische Umlaufzeit ist die Zeit, die vergeht, bis der Planet *von der Erde aus gesehen* wieder dieselbe Stellung relativ zur Sonne hat, z.B. also die Zeitspanne zwischen zwei Oppositionen des Planeten.

³Der sich ergebende Wert ist deutlich zu klein, weil sich Mars zur Zeit der Opposition nahe bei seinem Aphel befindet, sich also deutlich langsamer bewegt als im Mittel. Für einen besseren Wert muss über viele synodische Umläufe gemittelt werden.

- (c) Wie groß ist der **Zentralwinkel** ε , den die Erde in dieser Zeit überstreicht, wie groß demnach der von Mars überstrichene Winkel β ?

$$\varepsilon = \mu_E T_{syn} = 754^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 34^\circ \implies \beta = 360^\circ + 34^\circ = 394^\circ$$

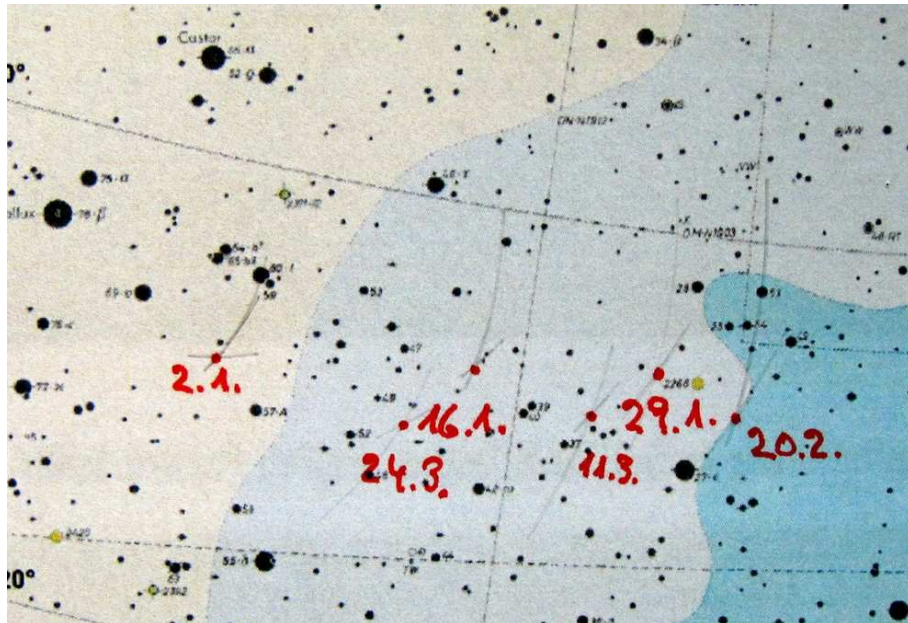
- (d) Welche Werte für die Winkelgeschwindigkeit μ_M und die siderische Umlaufzeit T_{sid} (Zeit für einen Umlauf um die Sonne bzgl. der Fixsterne) von Mars (Literaturwert: 687 Tage) ergeben sich daraus?

$$\mu_M = \frac{394^\circ}{765d} = 0.542^\circ/d \implies T_{sid} = 699 \text{ Tage}$$

2. Rekonstruktion des zweiten Teils der Marsschleife 1993

- (a) Übertrage die Positionen auf den Fotos (Abb. 1-6, von Joachim Reinhardt, Hamburg) auf die auf Folie kopierte Sternkarte *gleichen Maßstabs* ([5], Abb. 7, S. 13). Bringe dazu jeweils die Zwillingsterne Castor und Pollux auf Foto und Folie zur Deckung!

Eine andere Möglichkeit besteht darin, auf den einzelnen Bildern die Abstände zwischen Mars und den beiden Zwillingsternen mit einem Zirkel zu messen und in die Sternkarte zu übertragen.



- (b) Füge die Position am Tage der Opposition (**7.1.**) hinzu, indem du zwischen den beiden benachbarten Positionen linear interpolierst!

3. Bestimmung des Marsbahnradius

- (a) Bestimme für die Positionen *während der Rückläufigkeit* die Anzahl Δt der seit dem Tag der Opposition verstrichenen Tage, und berechne die in diesen Zeiten von Erde und Mars überstrichenen Zentralwinkel ε und β .

Datum	Δt	ε	β	d	η	r_M
2.1.1993	-5	-4.9	-2.7		-2.0	1.47
16.1.1993	9	8.9	4.9		3.5	1.47
29.1.1993	22	21.6	11.9		7.3	1.47
20.2.1993	44	43.4	23.8		8.9	1.46

- (b) Miss in der Sternkarte die Abstände d (in cm) von der Oppositionsposition und die zugehörigen Positionsveränderungen η von Mars, indem du zunächst den Maßstab der Karte bestimmst (z.B. mit dem Abstand zwischen den Sternen Castor und Pollux, der einem Winkel von 4.51° entspricht).

Maßstab: $2.37^\circ/cm$

- (c) Der Radius r_M der Marsbahn (Literaturwert für die große Halbachse: $a=1.52$ AE) kann dann aus Gleichung (1) berechnet werden.

4. Bahnneigung i und Knotenlänge Ω

- (a) Miss in der Sternkarte (mit Hilfe der eingezeichneten Ekliptik) die geozentrisch ekliptikalen Koordinaten (λ_g, β_g) der Marsposition am Tage der Opposition aus!

$$\lambda_g = 108^\circ, \quad \beta_g = 3.9^\circ$$

- (b) Leite daraus mit Hilfe von Abb. 4 und Gleichung (2) die heliozentrisch ekliptikalen Koordinaten (λ_h, β_h) von Mars am 7.1. ab!

$$\lambda_h = 108^\circ, \quad \beta_h = 1.3^\circ$$

- (c) Der letzte Knotendurchgang von Mars fand am **15.9.1992** statt (Wie kann man das feststellen?). Welchen Winkel ν_M hat Mars seitdem überstrichen? Berechne daraus die Neigung i der Marsbahn nach (3) (Literaturwert: 1.85°) und daraus nach (4) die heliozentrisch ekliptikale Länge Ω des Marsbahnknotens (Literaturwert: 49.5°). (Wegen der kleinen Bahnneigung kannst du dabei $\Delta\lambda \approx \nu_M$ annehmen.)

$$\begin{aligned} \nu_M = \mu_M \Delta t &= \mu_M 114d = 61.8^\circ \\ i = \arcsin \frac{\sin \beta_h}{\sin \nu_M} &= \arcsin \frac{\sin 1.3^\circ}{\sin 61.8^\circ} = 1.5^\circ \\ \Omega = \lambda_g - \nu_M &= = 48.3^\circ \end{aligned}$$



Abbildung 1: Mars in den Zwillingen am 2. Januar 1993



Abbildung 2: Mars in den Zwillingen am 16. Januar 1993



Abbildung 3: Mars in den Zwillingen am 29. Januar 1993



Abbildung 4: Mars in den Zwillingen am 20. Februar 1993



Abbildung 5: Mars in den Zwillingen am 11. März 1993



Abbildung 6: Mars in den Zwillingen am 24. März 1993

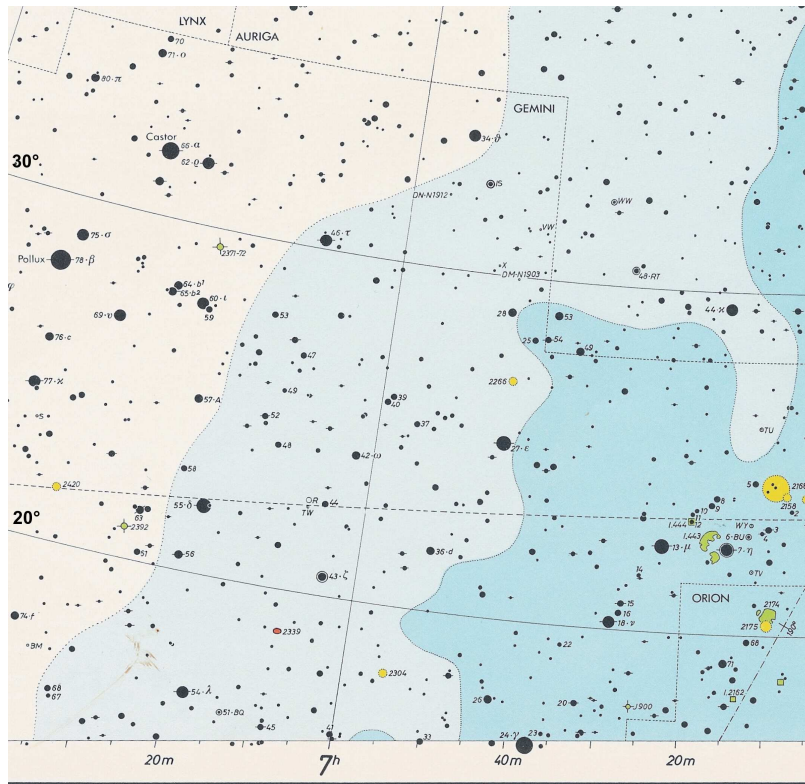


Abbildung 7: Das Sternbild „Zwillinge“ in einem Sternatlas. Diese Karte hat genau denselben Maßstab wie die Marsfotos.