Astronomisches Praktikum – Aufgaben für eine Schlechtwetter-Astronomie
U. Backhaus, Universität Duisburg-Essen

Die Parallaxe des Kleinplaneten Semiramis (Das ESO-Projekt Astronomy On-Line)
(mit Lösungen)

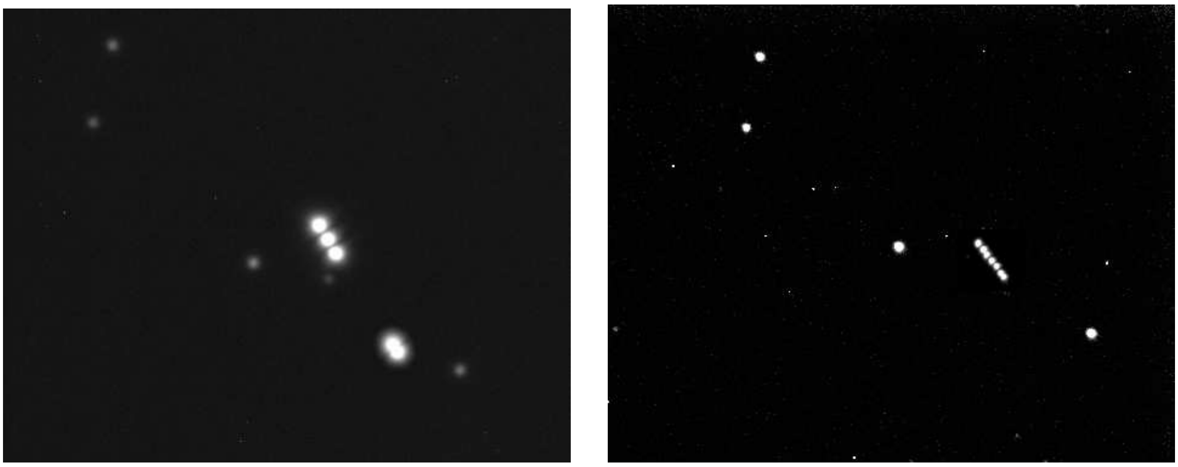


Abbildung 1: Serienaufnahme des Kleinplaneten Semiramis vom 21.11.1996. Links: Observatorium der Haute Provence, Frankreich, rechts: ESO-Observatorium auf La Silla, Chile

1 Einleitung

Die Astronomische Einheit ist eine der wichtigsten Größen der Astronomie. Sie bildet die Grundlage nicht nur für die Bestimmung der Größe des Sonnensystems und des gesamten Weltalls, sondern auch für die Messung der astrophysikalischen Eigenschaften der Planeten, der Sonne und anderer Sterne. Da sie schwierig zu messen ist, gibt es bis heute kaum eine Möglichkeit, in der Schule zu eigenen Messwerten zu kommen.

Keplers erste neuzeitliche Abschätzung der Entfernung der Sonne und Cassinis erste Bestimmung im 17. Jahrhundert beruhten auf einer Parallaxenmessung an Mars, dessen Entfernung von der Erde anschließend in den Abstand Erde - Sonne umgerechnet wurde.

Im Rahmen von **Astronomy On-Line**, einem weltweiten Astronomieprojekt der European Association for Astronomy Education (EAAE) in Zusammenarbeit mit dem European Southern Observatory (ESO) haben wir das Messverfahren von Richer und Cassini mit moderner CCD-Technik und den Möglichkeiten, die das Internet für schnelle internationale Kommunikation zur Verfügung stellt, nachvollzogen. Das Projekt ermöglichte es Schulen, Lehrern, Amateur- und Berufsastronomen, weltweit miteinander zu kommunizieren und internationale Zusammenarbeit „in Echtzeit“ und die Vorzüge, aber auch

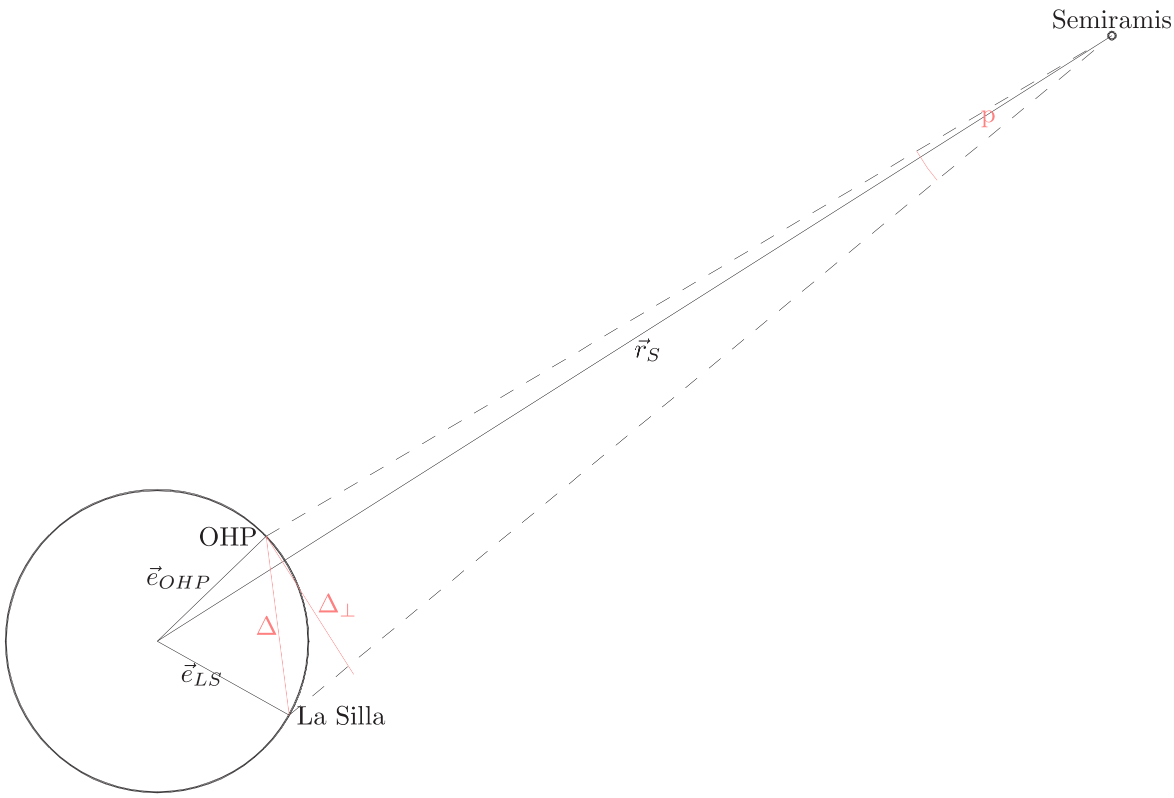


Abbildung 2: Parallaxenmessung durch gleichzeitiges Anpeilen eines Objektes von verschiedenen Orten der Erde

die Probleme der modernen Kommunikationstechnik zu erleben. Mit der Teilnahme sollte das Messverfahren erstmals auch Amateuren und gut ausgestatteten Schulen zugänglich gemacht und anderen zumindest realistische Messdaten und Auswertungsverfahren zur Verfügung gestellt werden.

Leider war in den beiden Nächten der „heißen Phase“ der Himmel über Europa fast vollständig bedeckt. Das Projekt wäre deshalb gescheitert, wenn wir nicht vorsorglich über Astronomy On-Line zusätzlich Beobachtungsanträge an Großteleskope gestellt hätten. Die dadurch gewonnenen professionellen Fotos, die die Observatorien auf dem **La Silla** in Chile und des **Observatoire de Haute Provence (OHP)** am **21. November 1996** vom Kleinplaneten **Semiramis** für unser Projekt aufgenommen haben, sollen in dieser Praktikumsaufgabe ausgewertet werden.

2 Das Messprinzip

Der Abstand zwischen Erde und Sonne, die sogenannte **Astronomische Einheit (AE)**, ist deshalb so schwierig zu messen, weil die Sonne so weit entfernt ist, dass ihre Parallaxe sehr klein ist. Außerdem ist die Sonne so hell, dass eine direkte Messung ihrer Winkelabstände zu benachbarten Sternen nicht möglich ist. Der „Trick“ besteht nun darin, die Entfernung der Sonne nicht direkt zu messen, sondern auf dem Umweg einer Abstandsmessung an einem Planeten (z. B. an Mars wie Kepler und Cassini) oder an Kleinplaneten

(z. B. an Semiramis in dieser Aufgabe) des Sonnensystems.

Das Prinzip einer solchen Messung ist einfach zu verstehen.

Ein naher Kleinplanet wird *gleichzeitig* von zwei möglichst weit voneinander entfernten Orten auf der Erde fotografiert. Beim Vergleich der beiden Fotos offenbaren sich etwas unterschiedliche „Blickrichtungen" zu dem Kleinplaneten – erkennbar an verschiedenen Positionen relativ zum Hintergrund der viel weiter entfernten Fixsterne. Vermessung seiner relativen Positionen auf den Fotos führt zu zwei *topozentrisch äquatorialen Positionen* (α_i, δ_i) des Kleinplaneten. Der Winkelabstand zwischen diesen Positionen ist der von dem Abstand Δ zwischen den beiden Beobachtungsorten hervorgerufene *Parallaxenwinkel* p des Kleinplaneten (s. Abb. 2).

Der Abstand d_S des Kleinplaneten ergibt sich dann gemäß

$$\boldsymbol{d_S = \frac{\Delta}{\tan p} \approx \frac{\Delta}{p}} \qquad (\boldsymbol{p} \text{ im Bogenmaß}) \tag{1}$$

Dabei ist zunächst vernachlässigt worden, dass die Verbindungslinie zwischen den Beobachtungsorten nicht senkrecht auf der Richtung zum Kleinplaneten steht.

Für die Entfernung kommt es aber auf den *projizierten Abstand* $\Delta_\perp$ zwischen den beiden Beobachtungsorten an, der um den Sinus des Projektionswinkels w kleiner ist. Aus (1) wird deshalb

$$\boldsymbol{d_S = \frac{\Delta_\perp}{p} = \frac{\Delta \sin w}{p}} \tag{2}$$

Um aus dieser Entfernung des Kleinplaneten von der Erde (als Vielfaches des Erdradius oder in Kilometern) auf die Astronomische Einheit schließen zu können, braucht man die Entfernung des Kleinplaneten zusätzlich als Vielfaches der Astronomischen Einheit:

$$\boldsymbol{d_S = \beta AE} \tag{3}$$

Eine solche Angabe konnte aber bereits Kepler mit Hilfe der Ephemeridenrechnung machen, ohne den Wert der AE zu kennen. Fasst man nun die Gleichungen (2) und (3) zusammen, ergibt sich schließlich die Astronomische Einheit als Vielfaches des Erdradius, bzw., wenn dieser in Kilometern bekannt ist, in Kilometern:

$$\boldsymbol{1AE = \frac{\beta}{d_S} = \frac{\beta \tan p}{\Delta \sin w}} \tag{4}$$

3 Etwas mehr Theorie

3.1 Der Parallaxenwinkel

Der Parallaxenwinkel w lässt sich aus den äquatorialen Koordinaten (α_i, δ_i) berechnen, die auf den Bildern der beiden Observatorien gemessen wurden:

$$p = \sqrt{((\alpha_1 - \alpha_2)\cos\delta)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2} \qquad (\text{mit } \delta = \delta_1 \text{ oder } \delta = \delta_2) \tag{5}$$

Eine andere Möglichkeit besteht in der Anwendung von Gleichung (6). Man kann den Winkel auch aus dem Skalarprodukt der Richtungsvektoren berechnen, nachdem die kartesischen Koordinaten gemäß (9) berechnet worden sind.

3.2 Die Basislänge der Parallaxenmessung

Um den linearen Abstand Δ zwischen den Beobachtungsorten berechnen zu können, braucht man ihre geografischen Koordinaten (Breite,Länge)$= (\varphi, \lambda)$. Aus ihnen lässt sich der zwischen den Orten aufgespannte Zentralwinkel η mit Hilfe des Seitenkosinussatzes der sphärischen Geometrie berechnen:

$$\cos\eta = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{6}$$

Aus dem Zentralwinkel η ergibt sich der gesuchte Abstand Δ wie folgt:

$$\Delta = 2R_E \sin\frac{\eta}{2} \qquad (R_E = \text{Erdradius}) \tag{7}$$

(Machen Sie sich das anhand einer Zeichnung klar!)

Etwas schwieriger ist die Berechnung des Projektionswinkel w. Dazu ist ein wenig Vektorrechnung erforderlich:

- Wenn man die Ortsvektoren $\vec{e}_{OHP}$ und $\vec{e}_{LS}$ der Observatorien auf La Silla und in der Haute Provence[1] und die Richtungsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ der von dort aus beobachteten Positionen von Semiramis als rechtwinklige Koordinaten *in demselben Koordinatensystem* kennt, lässt sich w mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen:

  $$\cos w = \vec{e} \cdot \frac{\vec{r}_{OHP} - \vec{r}_{LS}}{|\vec{r}_{OHP} - \vec{r}_{LS}|} \tag{8}$$

  Dabei kann für $\vec{e}$ eine der beiden beobachteten Richtungen genommen werden. (**Warum?**)

- Die rechtwinkligen äquatorialen Richtungskoordinaten lassen sich aus den gemessenen Werten für Rektaszension α und Deklination δ berechnen:

  $$\vec{e}_i = (x_i, y_i, z_i) = (\cos\alpha_i \cos\delta_i, \sin\alpha_i \cos\delta_i, \sin\delta_i). \tag{9}$$

- Um die Ortsvektoren der Observatorien in gleicher Weise berechnen zu können, mache man sich Folgendes klar:

  - Die Deklination δ eines Ortes auf der Erde ist gleich seiner geografischen Breite φ.
  - Die Sternzeit am Beobachtungsort ist 0 h, wenn der Frühlingspunkt gerade kulminiert. Dann liegen Frühlingspunkt, Beobachtungsort und Erdmittelpunkt in einer Ebene, und die Rektaszension des Ortes stimmt mit der des Frühlingspunktes überein: $\alpha = 0h$. Die Rektaszension des Ortes ändert sich, wie seine Sternzeit, durch eine vollständige Drehung der Erde im Laufe von 23h56min um $24h \stackrel{\wedge}{=} 360°$. Die Rektaszension des Ortes stimmt also zu jeder Zeit mit seiner Sternzeit θ überein.

[1] Genau genommen sind das die die durch den Erdradius dividierten Ortsvektoren.

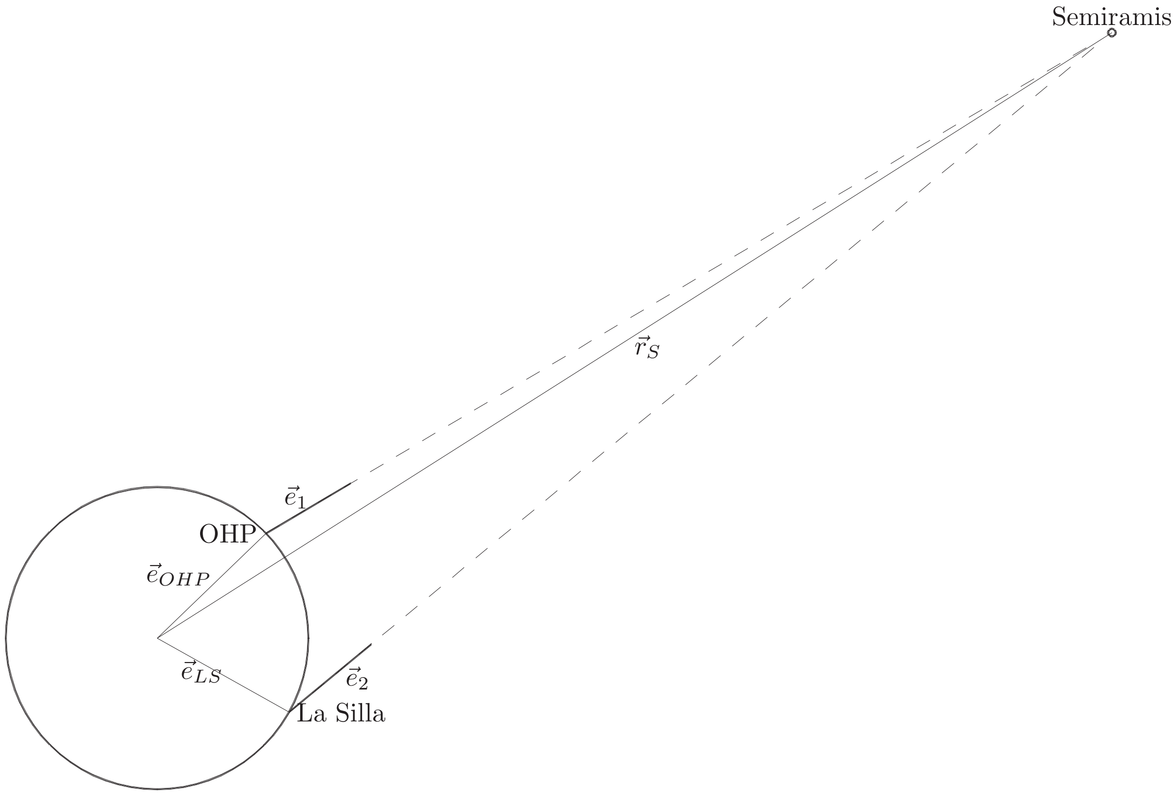


Abbildung 3: Zur vektoriellen Berechnung der geozentrischen Entfernung von Semiramis

Für die Berechnung der Sternzeit findet man im Internet viele Programme. Die hier benötigten Sternzeiten von La Silla und OHP werden mitgeteilt.

Aus Sternzeit θ und geografischer Breite φ lassen sich also entsprechend (9) zunächst die Ortsvektoren $\vec{e}_{OHP}$ und $\vec{e}_{LS}$ und dann mit (8) der Projektionswinkel w berechnen.

3.3 Vektorielle Berechnung der Entfernung (Zusatz)

Die bisher beschriebene Methode zur Berechnung der Entfernung des Kleinplaneten ist noch nicht exakt. Ein wesentlicher Fehler entsteht dadurch, dass im Allgemeinen der Verbindungsvektor der beiden Observatorien und der Vektor vom Erdmittelpunkt Richtung Semiramis nicht in einer Ebene liegen. Um diese Fehlerquelle zu beseitigen, muss die komplette Rechnung vektoriell durchgeführt werden

Semiramis muss sich irgendwo auf den Geraden befinden, die durch

$$\vec{e}_{OHP} + \lambda\vec{e}_1 \text{ und } \vec{e}_{LS} + \mu\vec{e}_2 \qquad \lambda, \mu > 0$$

beschrieben werden können. Wenn die Beobachter das Objekt gleichzeitig anvisiert haben, dann muss es sich am Schnittpunkt der beiden Sichtlinien befinden. Es muss also gelten:

$$\vec{e}_{OHP} + \lambda_0\vec{e}_1 = \vec{e}_{LS} + \mu_0\vec{e}_2.$$

Das sind drei Gleichungen mit nur zwei zu bestimmenden Unbekannten λ_0 und μ_0! Anders als in einer Ebene werden sich die beiden Geraden nur bei exakten Messungen schneiden. Andernfalls verfehlen sie einander („windschiefe Geraden“). Wegen immer auftretender Messfehler wird also obiges Gleichungssystem niemals lösbar sein.

Aus diesem Grunde ist man gezwungen, statt des Schnittpunktes die Stelle der größten Annäherung zwischen den beiden Geraden zu berechnen. Das heißt, wir suchen nach zwei Punkten $\vec{P}_1 = \vec{r}_{OHP} + \lambda_0 \vec{e}_1$ und $\vec{P}_2 = \vec{r}_2 + \mu_0 \vec{e}_2$ auf den Geraden, deren Verbindungsvektor senkrecht auf beiden Geraden steht:

$$
\begin{aligned}
(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_1 &= 0, && (10)\\
(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_2 &= 0 && (11)
\end{aligned}
$$

Das ist nun ein System zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten λ_1 und μ_2. Eine einfache Umformung führt auf die folgenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 + \mu_0 &= \frac{(\vec{e}_{LS} - \vec{e}_{OHP}) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)}{1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2},\\
\lambda_0 - \mu_0 &= \frac{(\vec{e}_{LS} - \vec{e}_{OHP}) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2},
\end{aligned}
$$

aus denen die gesuchten Parameter leicht zu berechnen sind:

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{2}\left((\lambda_0 + \mu_0) + (\lambda_0 - \mu_0)\right), && (12)\\
\mu_0 &= \frac{1}{2}\left((\lambda_0 + \mu_0) - (\lambda_0 - \mu_0)\right). && (13)
\end{aligned}
$$

Die geozentrische Entfernung von Semiramis ergibt sich dann schließlich mit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{d_S} &\approx |\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{1}}| = |\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{OHP}} + \boldsymbol{\lambda_0} \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}|\\
&\approx |\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{2}}| = |\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{LS}} + \boldsymbol{\mu_0} \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}}| && (14)
\end{aligned}
$$

als Vielfaches des Erdradius.

Als Maß für die Genauigkeit des Ergebnisses kann man den Minimalabstand $|\vec{P}_1 - \vec{P}_2|$ der beiden Sichtlinien nehmen.

4 benötigte Hilfsmittel

- Bilder vom ESO-Observatorium La Silla
  `Fotos/Astrometry/LaSilla/newimageLaSilla3.fit3 - newimageLaSilla9.fits`
- Bilder vom Observatorium der Haute Provence
  `Fotos/Astrometry/OHP/newimageOHPa.fits - newimageOHPe.fits`
- Astrometriesoftware (**ImageJ** (`http://rsbweb.nih.gov/ij/`) zusammen mit dem Astronomy-Plug-In (`http://www.astro.physik.uni-goettingen.de/~hessman/ImageJ/Astronomy/`)) oder
  AstroImageJ (`http://www.astro.louisville.edu/software/astroimagej/`), in das das Astronomy-Plug-In bereits integriert ist

- vorbereitete Excel-Tabelle `AuswertungLS-OHP.xls` (bzw. `AuswertungLS-OHPmL.xls`) mit den Aufnahmedaten beider Bildserien

Literatur

[1] Homepage des Internet-Projekts *Astronomy On-Line: Measuring the Distance to the Sun*,
`http://www.eso.org/public/outreach/eduoff/aol/market/collaboration/solpar/`,
als pdf-Datei unter
`http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/aol/AOLDistanz.pdf`

[2] U. Backhaus, *Astronomy On-Line: Measuring the Distance to the Sun – Final Report*,
`http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/aol/finalrep.htm`,
als pdf-Datei unter
`http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/aol/final/AOLFinalReport.pdf`

[3] U. Backhaus, *Astronomy On-Line: Measuring the Distance to the Sun*, Vorträge der DPG 1997 in Berlin
`http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/aol/AstronomyOnLine.pdf`

5 Aufgaben (mit Lösungen)

In dieser Praktikumsaufgabe werden beispielhaft professionelle Fotos ausgewertet, die im Rahmen des internationalen Projekts **Astronomy On-Line** am 21. November 1996 vom **Kleinplaneten Semiramis** kurz vor und kurz nach 2:00 UT von den Observatorien in der **Haute Provence (OHP)** und auf dem **La Silla (LS)** aufgenommen wurden.

*Die für die folgenden Aufgaben erforderlichen Rechnungen werden durch eine **Exceltabelle** erleichtert. Die Tabelle mit Lösungen enthält die kompletten Rechnungen.*

Aufgabe 1 Messen Sie auf den Bildern im Verzeichnis `Fotos/Astrometry` die Positionen des Kleinplaneten. Die Bilder enthalten durch Analyse mit `Astrometry.net` bereits die dazu erforderlichen Astrometriedaten (World-Coordinate-System- oder WCS-Koordinaten). Verwenden Sie eins der Programme `ImageJ` oder `AstroImageJ`[2].

- Laden Sie die Fotos jeweils in einen Stack („File → Import → Image Sequence“).
- Vergrößern Sie die Darstellung („+“) auf 200%, und verschieben Sie die Bilder so, dass Semiramis im Ausschnitt zu sehen ist. Ziehen Sie gerade Linie durch den Kleinplaneten, und lassen Sie sich das Linienprofil anzeigen („Analyse → Plot Profile“). Das Profil vermittelt einen Eindruck von Halbwertsbreite und Breite des Beugungsscheibchens – und damit von den geeigneten Radien, die Sie nach Doppelklick auf das Aperture-Symbol einstellen können. Nach einer ersten Positionsmessung mit der Aperture-Routine kann man in der measurement-table den Durchmesser (die „width“) des Planetenscheibchens ansehen und dann ggf. die Radien korrigieren[3]. Nicht vergessen, sich bei Messung die folgenden Parameter anzeigen zu lassen: Julian Date, world coordinates, mean moment width.
- Die folgenden Radien könnten geeignet sein:
  - La Silla: 4, 8 und 10
  - OHP: 5, 10 ud 12
- Speichern Sie die Messtabellen als `MeasurementsLS.xls` bzw. als `MeasurementsOHP.xls` ab. Öffnen Sie diese Tabellen anschließend mit einem Tabellenkalkulations-Programm (z. B. `Excel`)[4] und speichern Sie sie anschließend unter demselben Namen als Arbeitsmappe ab.

  Lösung:

[2] Dieses Programm gibt die Raktaszension in Stunden an. Die Werte müssen durch Multiplikation mit 15 in Grad umgewandelt werden.

[3] An Introduction to Astronomical Image Processing with ImageJ (`http://www.astro.physik.uni-goettingen.de/~hessman/ImageJ/Book/`), insbesondere der Abschnitt „Aperture Photometry“ `http://www.astro.physik.uni-goettingen.de/~hessman/ImageJ/Book/Measuring%20Brightness/index.html#photometry`

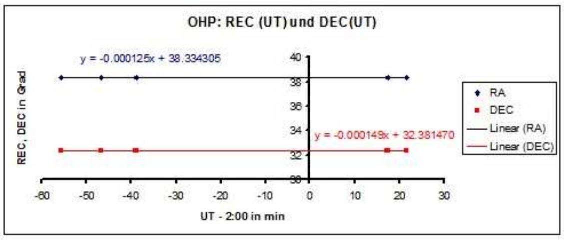
[4] Es handel sich zunächst um Tabstopp-getrennte Textdateien.

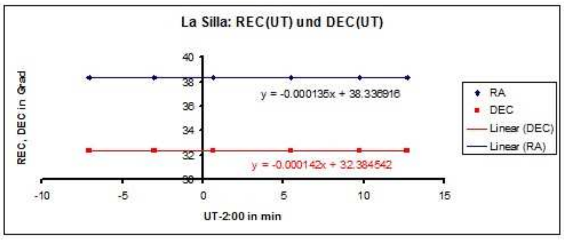
Observatoire de Haute Provence		
UT	*Rekt. in Grad*	*Dekl. in Grad*
01:04:17	*38.341298*	*32.38981*
01:13:11	*38.340167*	*32.388471*
01:21:02	*38.339204*	*32.387237*
02:17:25	*38.33207*	*32.37891*
02:21:35	*38.331644*	*32.378219*

La Silla		
UT	*Rekt. in Grad*	*Dekl. in Grad*
01:48:27	*38.338559*	*32.386228*
01:52:56	*38.337820*	*32.385554*
01:56:58	*38.337360*	*32.384981*
02:00:38	*38.336866*	*32.384438*
02:05:29	*38.336178*	*32.383757*
02:09:43	*38.335610*	*32.383155*
02:12:42	*38.335170*	*32.382742*

Aufgabe 2 a) Übertragen Sie Koordinaten des Kleinpaneten (Rektaszension und Deklination) in die entsprechenden Arbeitsblätter der Arbeitsmappe `AuswertungLS-OHP.xls`, und erstellen Sie Diagramme, die für beide Standorte Rektaszension und Deklination als Funktion der Uhrzeit – oder besser: der Abweichung von 2:00 UT – darstellen.

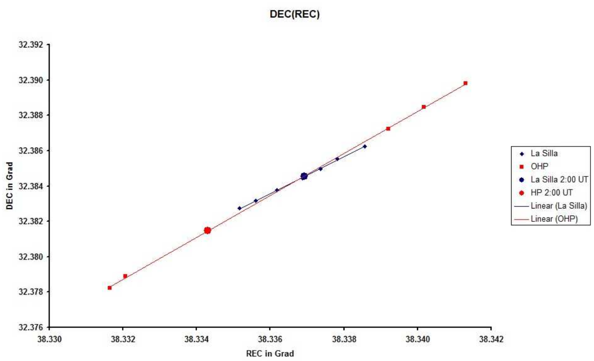
Lösung:





b) Erzeugen Sie zusätzlich auf einem gesonderten Arbeitsblatt ein Diagramm, das die Bewegung des Kleinplaneten über den Himmel (Deklination als Funktion der Rektaszension) so darstellt, wie sie von den beiden Observatorien beobachtet worden ist.

Lösung:



Aufgabe 3 Die parallaktische Verschiebung von Semiramis

Leider haben wir keine von den beiden Observatorien gleichzeitig aufgenommenen Fotos, weil Semiramis um 2:00 UT über der Haute Provence von Wolken verdeckt war. Zum Glück aber konnte der Kleinplanet vorher und nachher von dort fotografiert werden (s. Abb. 1, links).

Auf den Fotos ist zu erkennen, dass sich Semiramis während der Beobachtung in sehr guter Näherung geradlinig gleichförmig bewegt. Die Positionen, an denen er um 2:00 UT abgebildet worden wäre, lassen sich also durch **lineare Interpolation** berechnen.

- Bestimmen Sie für beide Standorte die Gleichungen der Geraden $\alpha(UT)$ und $\delta(UT)$.

  Tipps:

  – Das ist „per Hand“ möglich, indem jeweils die Koordinaten auf der ersten und der letzten Aufnahme verwendet. Sie können sich auch von `Excel` die Arbeit abnehmen lassen, indem Sie Ausgleichsgeraden berechnen und die Geradengleichungen im Diagramm darstellen lassen.

  – Es ist geschickt, die Koordinaten gleich als Funktion von UT-2:00 berechnen zu lassen.

  Lösung:
  Die Geradengleichungen kann man man folgendermaßen erhalten:

$$\begin{aligned}\alpha(UT) &= \alpha(UT_1) + \frac{\alpha(UT_2) - \alpha(UT_2)}{UT_2 - UT_1}(UT - UT_1), \\ \delta(UT) &= \delta(UT_1) + \frac{\delta(UT_2) - \delta(UT_2)}{UT_2 - UT_1}(UT - UT_1)\end{aligned}$$

  `Excel` *gibt folgende Parameter der Geradengleichungen an (siehe obige Bilder):*

OHP	$\alpha = -\frac{0.000125^\circ}{min}(UT - 2:00) + 38.334305^\circ$ $\delta = \frac{-0.000149^\circ}{min}(UT - 2:00) + 32.381470^\circ$
La Silla	$\alpha = -\frac{0.000135^\circ}{min}(UT - 2:00) + 38.336916^\circ$ $\delta = \frac{-0.000142^\circ}{min}(UT - 2:00) + 32.384542^\circ$

- Bestimmen Sie die 2:00UT-Positionen von Semiramis für die beiden Observatorien, und berechnen Sie daraus den Parallaxenwinkel p mit Hilfe einer der Gleichungen (5) oder (6).

  Lösung: *Bei Auftragung von Rektaszension und Deklination über UT-2:00 geben die Achsenabschnittsterme obiger Geradengleichungen gerade die gesuchten Koordinaten wieder.*

	α	δ	p
OHP	38.334305°	32.381470°	13.66″
La Silla	38.336930°	32.384549°	

Aufgabe 4 Die Entfernung von Semiramis

- Bestimmen Sie zunächst den linearen Abstand Δ zwischen OHP und La Silla als Vielfaches von R_E aus den geografischen Koordinaten der Standorte der Observatorien.
  - **OHP: $\boldsymbol{\varphi = 43.93°,\ \lambda = 5.7125°}$**
  - **La Silla: $\boldsymbol{\varphi = -29.25°,\ \lambda = -70.733°}$**

  Lösung: *Aus dem Seitenkosinussatz (6) ergibt sich zunächst, dass von den beiden Standorten im Erdmittelpunkt ein Winkel von*

  $$\eta = 101°$$

  aufgespannt wird.
  Nach (7) ergibt sich daraus ein linearer Abstand von

  $$\Delta = 1.54 R_E.$$

- Berechnen Sie daraus einen ersten Schätzwert für die Entfernung von Semiramis als Vielfaches des Erdradius und in Kilometern ($\boldsymbol{R_E = 6378km}$). Kümmern Sie sich dabei zunächst nicht um den Projektionswinkel.
  Lösung: *Nach Gleichung (1) ergibt sich*

  $$d_S = \frac{\Delta}{\tan p} = 23313 R_E = 148700000km$$

- Um zu einem besseren Ergebnis zu gelangen, müssen Sie den Winkel zwischen der Verbindung OHP - La Silla und der Richtung zu Semiramis berücksichtigen. Dazu müssen die Sternzeiten an den Beobachtungsorten zum Zeitpunkt der Aufnahmen bekannt sein (siehe die Erläuterungen im Anschluss an Gleichung (9)).

Sternzeiten um 2:00 UT		
OHP	**06:24:16**	**96.07°**
La Silla	**01:18:29**	**19.62°**

  Berechnen Sie nun nach (9) zunächst die kartesischen Koordinaten $\vec{e}$ der Observatorien und des Kleinplaneten und daraus mit Hilfe des Skalarprodukts den Projektionswinkel.
  Lösung:

  $$\begin{aligned} \vec{e}_{OHP} &= (-0.076114242, 0.716161831, 0.693771471) \\ \vec{e}_{LS} &= (0.82183489, 0.292979002, -0.488621241) \\ \Longrightarrow \quad \vec{e}_{OHP} - \vec{e}_{LS} &= (-0.897949133, 0.423182829, 1.182392713) \\ \Longrightarrow \quad \vec{e}_{LS\to OHP} &= (-0.581632699, 0.27411015, 0.765876641) \\ \vec{e}_1 &= (0.662431069, 0.523800837, 0.535553696) \\ \vec{e}_2 &= (0.662384494, 0.523813327, 0.535599085) \\ \Longrightarrow \quad w &= \arccos(\vec{e}_{LS\to OHP} \cdot \vec{e}_1) = 80° \end{aligned}$$

Damit lassen sich nun die projizierte Basislänge $\Delta_\perp$ der Parallaxenmessung und ein verbesserter Wert für die Entfernung von Semiramis berechnen.

Lösung:

$$d_S = \frac{\Delta_\perp}{\tan p} = \frac{\Delta \sin w}{\tan p} = \frac{1.52 R_E}{\tan p} = 22980 R_E = 146568000 km$$

Aufgabe 5 Die Astronomische Einheit

Beim Minor Planet & Comet Ephemeris Service der IAU[5] finden Sie für den 21. November 1996 um 2:00 UT einen geozentrischen Abstand von Semiramis von $\boldsymbol{d_{S_{MPS}} = 0.972 AE}$. *Dieser Wert lässt sich im Prinzip berechnen, ohne den Zahlenwert der Astronomischen Einheit zu kennen!*

Berechnen Sie nun zum Schluss aus dem Ergebnis der Entfernungsmessung an Semiramis, wie groß die Astronomische Einheit als Vielfaches des Erdradius und in Kilometern ist!

Lösung:

$$1AE = \frac{d_S}{d_{S_{MPS}}} = 23642 R_E = 150790000 km$$

Um wieviel Prozent weicht das Messergebnis vom wahren Wert der Astronomischen Einheit ($\boldsymbol{1AE = 23454.78 R_E = 149597870.5 km}$) ab?

Lösung: *Das Messergebnis ist um 0.8% größer als der wahre Wert.*

[5] http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html

Zusatzaufgaben

Korrekte Vektorrechnung (kann evtl. ganz weggelassen werden, weil sie hier zu exakt demselben Ergebnis führt)

Berechnen Sie nach der in Kapitel 3.3 beschriebenen Methode den Minimalabstand der beiden Sichtlinien und den Abstand, den diese Stelle vom Erdmittelpunkt hat.

Lösung: *Als Ergebnis des Gleichungssystems (10) und (11) findet man*

$$\lambda_0 = 22979.7 \qquad \textit{und} \qquad \mu_0 = 22980.0$$

und damit den geozentrischen Abstand von Semiramis zu

$$d_S = 22980.2 R_E.$$

Das stimmt fast perfekt mit dem oben gefundenen Ergebnis überein.

Der Minimalabstand der beiden Sichtlinien ist, verglichen mit der Entfernung des Kleinplaneten, sehr klein:

$$|\vec{P}_1 - \vec{P}_2| = 1.0 R_E.$$

Alignment der OHP- und La-Silla-Bilder (Bildverarbeitung)

Erstellen Sie aus den Fotoserien vom La Silla und aus der Haute Provence durch Überlagerung jeweils ein Serienbild entsprechend Abbildung 1. Verwenden Sie dazu im Programm `ImageJ` die Routine „Plugins → Stacks → Align Stack“, nachdem Sie eine Serie in einen Stack geladen haben („File → Import → Image Sequence“).

Lösung: *Für ein grobes Alignment reicht es aus, die Bilder anhand eines einzigen Fixsternes auszurichten. Bei den La-Silla-Fotos funktioniert das sofort mit Aperture-Radien 4-8-10. Beim OHP war die Nachführung des Teleskops so schlecht, dass dieser Stern zuerst „eingefangen“ werden muss, indem zunächst größere Radien eingestellt werden, z. B. 20-30-32, und diese erst in einem zweiten Durchgang auf die kleineren Werte gestellt werden.*

Anschließend werden die Bilder zusammengefasst, indem für jeden Bildpixel die größte Helligkeit aller Bilder an dieser Stelle genommen wird: „Image → Stacks → Z Project“.

Wenn man mit dem Ergebnis nicht zufrieden ist, kann man jedes Bild einzeln an dem ersten Bild durch Verschiebung und Drehung ausrichten: „Plugins → Astronomy → Align Image“.

Überlagerung der beiden Bildserien (Bildverarbeitung)

Überlagern Sie die beiden Serienbilder, die Sie für die vorangegangene Aufgabe erstellt haben, zu einem Kombinationsbild. Da die beiden Bilder unterschiedlich groß sind, unterschiedliche Maßstäbe und nicht ganz dieselbe Orientierung haben, muss dazu die Routine verwendet werden, die „Shift+Rotate+Scale“

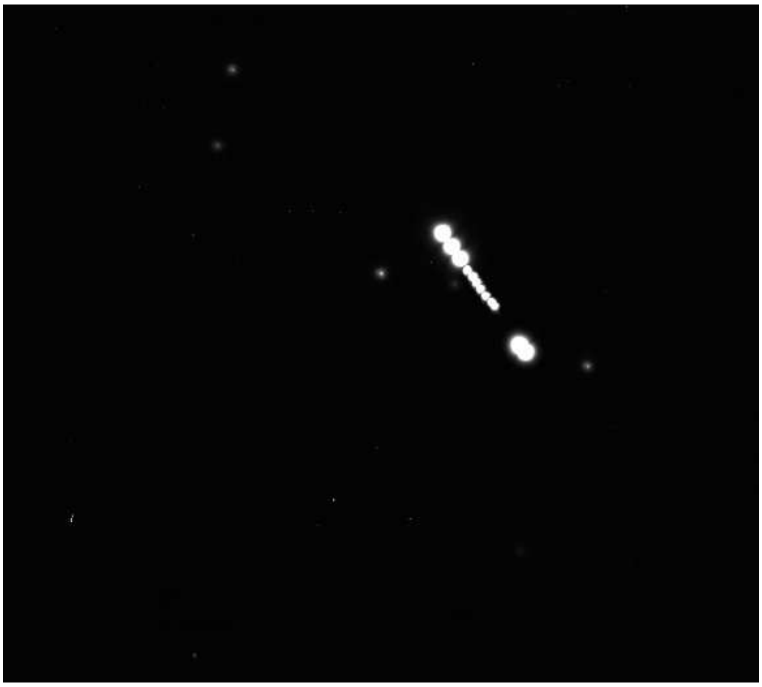


Abbildung 4: Die Überlagerung der beiden Eingangsbilder lässt die unterschiedliche Perspektive von La Silla und OHP ahnen.

erlaubt: „Plugins → Astronomy → Align Image“. Dazu müssen Sie auf beiden Bildern dieselben (mindestens) drei Sterne mit dem „Aperture Photometry Tool“ in derselben Reihenfolge markieren.

Lösung: *(siehe Abbildung 4)*

.

6 Nachtrag: Zur Korrektor der Aufnahmezeitpunkte bei den OHP-Fotos

Die in dieser Aufgabe verwendeten Zeitpunkte für die OHP-Fotos unterscheiden sich um acht Minuten von den in den Fits-Headern angegebenen Zeiten. Diese *Manipulation* hat folgende Geschichte:

Während des Projektes **Astronomy On-Line** wurden die Bilder mit dem hier durchgeführten Verfahren ausgewertet, natürlich mit den originalen Aufnahmezeiten. Das Ergebnis war allerdings mit einer Sonnenparallaxe von $\pi_S = 5.6''$, die einer Astronomischen Einheit von etwa $37000 R_E$ (statt $23455 R_E$) entspricht, ziemlich schlecht. Wie konnte das sein, bei so guten professionellen Fotos?

Nachdem eigene Auswertungsfehler ausgeschlossen werden konnten, bemerkten wir, dass sich ein wesentlich besserer Wert ergab, wenn die Aufnahmezeiten um 7-8 Minuten korrigiert wurden. Tatsächlich bestätigte sich der Verdacht einer ungenau gehenden Uhr in Südfrankreich wenige Tage später per E-Mail:

> **Anfrage aus Koblenz**: *"I think we found the reason (for the difference described above): You should take care for the clock in your observatory (or, at least, of the computer): Most likely, it gaines about 7-8 minutes. ... Are we right?"*
>
> **Antwort vom OHP**: *"I had indeed noticed a 7 minutes difference between the computer clock and the UT! ... My correction of 7 min is approximate only, it could be a little more. ..."*

Auf dem Umweg über die Entfernung zur Sonne hatten wir den ungenauen Gang der Uhr beim OHP nachgewiesen!

Für diese Praktikumsaufgabe wurden die Aufnahmezeiten um 8 min korrigiert, um die Auswertung nicht zusätzlich zu verkomplizieren.

In der Excel-Tabelle mit Lösung befindet sich auf Tabellenblatt „Berechnung“ in Zelle H13 ein Parameter, mit dem man den Einfluss kleiner Verschiebungen der OHP-Aufnahmezeiten untersuchen kann.