Schiffe am Horizont und der Erdradius

Abbildung 1: Unterschiedlich weit entfernte Schiffe bei Helgoland [2]

„Daß die wegfahrenden Schiffe von dem Berg des ‚abwärts' gekrümmten Meeresspiegels unter den Horizont hinunterschwinden, das haben immer einige schon erfahren; auch daß jenseits großer See- und Fjordflächen der Uferstreifen verdeckt ist von dem Wasserberg, der sich dazwischen erhebt." (Wagenschein [4])

1 Einleitung

An der Küste kann man bei sehr guter Fernsicht beobachten, dass Schiffe unter dem Horizont verschwinden, wenn sie sich entfernen, bzw. dass die Aufbauten früher sichtbar werden als der Rumpf, wenn sich ein Schiff nähert (Abb. 1). Diese Erfahrung machten sich bereits die seefahrenden Menschen im Altertum zunutze, indem sie das „Krähennest" oder den „Ausguck" auf Schiffen möglichst hoch anbrachten, damit Küsten oder andere Schiffe in möglichst großer Entfernung entdeckt werden konnten.

Der Effekt wurde schon früh als Hinweis auf die Kugelgestalt der Erde gedeutet (Abb. 2).

Abbildung 2: Darstellung des Zusammenhanges zwischen Erdkugel und Sichtweite aus dem Jahr 1549 (entnommen aus [1])

Wenn es gelingt, den Zusammenhang zwischen dem „Abtauchen“ eines Schiffes und seiner Entfernung zu messen, dann kann aus den Messergebnissen die Größe der Erde abgeleitet werden. Entsprechende Messungen sind allerdings äußerst schwierig, weil der Effekt erst bei Entfernungen von vielen Kilometern deutlich wird und Schiffe in solchen Entfernungen scheinbar bereits sehr klein geworden sind. Außerdem muss die Fernsicht extrem gut sein, damit die scheinbare Größe der Schiffe und ihr „Abtauchen“ gemessen werden können. Eigene jahrelange Versuche, bei Seeurlauben entsprechende Situationen zu fotografieren, haben nie zu überzeugenden Ergebnissen geführt.

Wolfgang Bischof und *Burkhard Steinrücken* [1] sind solche Fotos gelungen, und sie haben gezeigt, wie durch gründliche Analyse der Bilder die Größe der Erde bestimmt werden kann. In dieser Praktikumsaufgabe sollen die dazu nötigen Überlegungen und Rechnungen anhand der Originalfotos schrittweise nachvollzogen werden.

2 Etwas Theorie

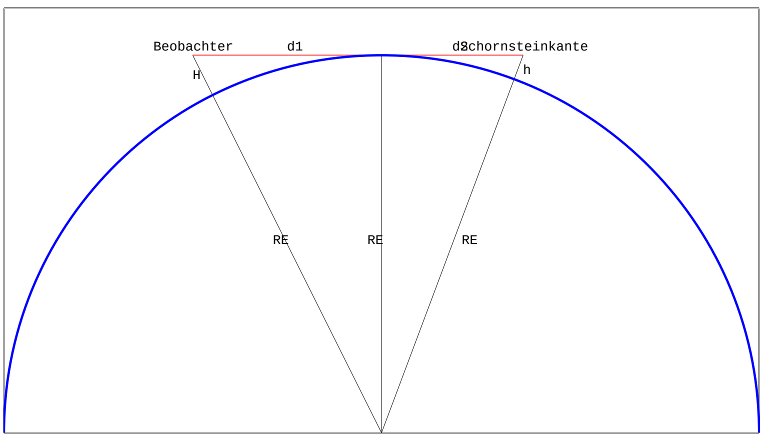

Abbildung 3: Zum Zusammenhang zwischen der Höhe H des Beobachters, seiner Sichtweite d_1 bis zum Horizont und dem Radius R_E der Erde

Die Abhängigkeit der Sichtweite d_1 eines Beobachters bis zum Horizont, seiner Höhe H über dem Meeresspiegel und dem Erdradius R_E ist, wenn man von der Lichtbrechung in der Atmosphäre absieht, ein einfaches geometrisches Problem: Anhand von Abbildung 3 findet man leicht den folgenden Zusammenhang:

$$d_1^2 = (R_E + H)^2 - R_E^2 = 2R_EH - H^2 \approx 2R_EH \tag{1}$$

Eine entsprechende Beziehung gilt für das anzupeilende Objekt mit der Höhe h. Fasst man die beiden Beziehungen zur Entfernung

$$d = d_1 + d_2$$

zwischen Beobachter und Objekt zusammen, ergibt sich

$$R_E = \frac{d^2}{2(H + h + 2\sqrt{Hh})} \tag{2}$$

Durch die Lichtbrechung in der Atmosphäre wird die Beziehung allerdings komplizierter: Ein sich von der Erdoberfläche entfernender Lichtstrahl wird dadurch etwas nach unten gekrümmt. Die Sichtweite zum Horizont vergrößert sich – das heißt, die Erde erscheint etwas größer, als sie in Wirklichkeit ist.

Diesen Effekt kann man näherungsweise folgendermaßen berücksichtigen ([1]): Der Lichtstrahl vom Horizont ins Auge des Beobachters wird kreisförmig mit dem Radius r angenommen, für den gilt $\frac{R_E}{r} = 0.13 = k$. Dadurch vergrößert sich die Sichtweite um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-k}}$, bzw. der Radius der Erde erscheint um den Faktor $\frac{1}{1-k}$ vergrößert.

3 Benötigte Hilfsmittel

- Lineal mit mm-Maßstab
- Taschenrechner
- Archivbild der Fähre (Abb. 4)
- 3 Fotos der sich entfernenden Fähre (Abb. 7-9)
- Für eine Auswertung am Computer

  1. Archivbild der Fähre (`FaehreA.jpg`)
  2. Originalfotos der sich entfernenden Fähre (`Faehre1.jpg, Faehre2.jpg, Faehre3.jpg`)
  3. Excel-Tabelle zur Vereinfachung der Rechnungen ohne Lösungen (`AuswertungHorizont.xls`)

  Diese Dateien sind in einem zip-Archiv zusammengefasst, das aus dem Netz heruntergeladen werden kann.

  Zusätzlich ist ein einfaches Bildbearbeitungsprogramm erforderlich, mit dem in den Bildern pixelgenau Positionen gemessen werden können (z. B. `ImageJ`[1]

[1] `http://rsbweb.nih.gov/ij/`

Literatur

[1] Bischof, W., Steinrücken, B.:Hinter'm Horizont geht's weiter. Die Bestimmung der Erdgröße aus der Beobachtung von Schiffen am Meereshorizont, Astronomie und Raumfahrt 52/1, 22 (2015)

[2] Falke, T., `http://www.duene1.de/homepage/weiss11/weiss153.htm`

[3] Liljequist, G. H.; Cehak, K. *Allgemeine Meteorologie*, Vieweg: Braunschweig 2006

[4] Wagenschein, M.: *Die Erfahrung des Erdballs* in: Naturphänomene sehen und verstehen – Genetische Lehrgänge. Klett, Stuttgart 1988 (`http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/Erdball.pdf`)

4 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben können entweder mit den ausgedruckten Abbildungen dieser Praktikumsaufgabe oder mit einem geeigneten Bildbearbeitungsprogramm und den Digitalbildern in der Materialsammlung am Computer bearbeitet werden.

Das verwendete Fernrohr hatte eine Brennweite von $\boldsymbol{f = 1411mm}$. Der CCD-Chip hatte eine Größe von $\boldsymbol{b_C * h_C = 39.9mm * 24.0mm}$, die Anzahl seiner Pixel betrug $\boldsymbol{6016 * 4016Px}$.

Die Bilder sind Ausschnitte der Größe $\boldsymbol{2700 * 1800Px}$ aus den Originalbildern.

1. **Vorbereitung: Messen Sie den Maßstab der Bilder.**

   (a) Bestimmen Sie anhand des Archivbildes (Abb. 4) der Fähre die Höhe $\boldsymbol{h_0}$ der obersten Kante des Schornsteins über der Wasseroberfläche. Verwenden Sie dazu die Länge der Fähre $\boldsymbol{l_F = 154m}$. (Abb. 4).

Abbildung 4: Archivbild und Daten der Fähre (aus [1])

$$\text{Maßstab des Archivbildes } M_A = $$
$$h_0 = \qquad\qquad m$$

   (b) Bestimmen Sie den Winkelmaßstab M_B der drei Bilder der sich entfernenden Fähre.

$$\text{Maßstab der Bilder } M_B = \qquad \frac{''}{Px}$$

2. **Messen Sie die drei Entfernungen der Fähre durch Vergleich zwischen ihrer scheinbaren (Winkel-) Größe mit ihrer tatsächchen Länge. Berücksichtigen Sie dabei den Winkel zwischen der Sichtlinie und der Fahrtrichtung der Fähre.**

   (a) Messen Sie auf den Bildern zunächst die scheinbare Breite b_{pr_i} der Heckklappe und die scheinbare Länge l_{pr_i} der Fähre (bis zur Mitte der Heckklappe).

$$b_{pr_1} = \qquad l_{pr_1} =$$

$$b_{pr_2} = \qquad l_{pr_2} =$$

$$b_{pr_3} = \qquad l_{pr_3} =$$

   (b) Die sichtbare Heckklappe zeigt, dass sich die Fähre nicht senkrecht zur Blickrichtung fährt und dadurch verkürzt erscheint.
   Bestimmen Sie die zu den drei Bildern gehörenden Projektionswinkel α_i.
   Tipp: Nehmen Sie der Einfachheit halber an, der Rumpf der Fähre habe einen dreieckigen Querschnitt.

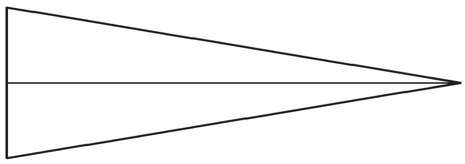

Abbildung 5: Vereinfachter Querschnitt der Fähre

$$\begin{aligned} \tan\alpha_1 &= \qquad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \qquad {}^\circ \\ \tan\alpha_2 &= \qquad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = \qquad {}^\circ \\ \tan\alpha_3 &= \qquad \Longrightarrow \quad \alpha_3 = \qquad {}^\circ \end{aligned}$$

   (c) Leiten Sie nun aus den Projektionswinkeln die scheinbaren Längen l'_i der Fähre auf den drei Bildern ab, d. h. die Länge, die die Fähre auf den Bildern hätte, wenn sie senkrecht zur Sichtlinie führe, und berechnen Sie daraus ihre jeweilige Entfernung.
   Die Winkellängen l_i der Fähre auf den Bildern betragen

$$\begin{aligned} l_1 &= \\ l_2 &= \\ l_3 &= \end{aligned}$$

   Daraus ergeben sich die folgenden Entfernungen d_i:

$$\begin{aligned} d_1 &= \qquad m \\ d_2 &= \qquad m \\ d_3 &= \qquad m \end{aligned}$$

3. **Messen Sie die Höhen h'_i der Schornsteinkante über der Kimm, und leiten Sie daraus die Höhen h_i der Kimmlinie über der Wasseroberfläche ab.**

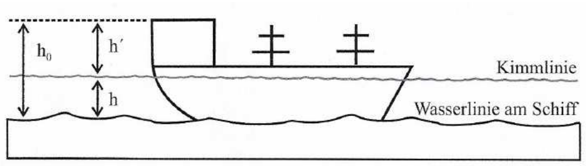

Abbildung 6: Zur Ermittlung der Höhe h der Kimmlinie über der Wasseroberfläche (aus [1])

$$h'_1 = \qquad \Longrightarrow \quad h_1 = \qquad m$$
$$h'_2 = \qquad \Longrightarrow \quad h_2 = \qquad m$$
$$h'_3 = \qquad \Longrightarrow \quad h_3 = \qquad m$$

4. **Berechnen Sie aus der Hebung der Kimmlinie und der Entfernung der Fähre den Radius der Erde.**

   (a) Verwenden Sie zunächst die aus geometrischen Überlegungen gewonnene Gleichung (2).

$$R_{E_1} = \qquad km$$
$$R_{E_2} = \qquad km$$
$$R_{E_3} = \qquad km$$

   (b) Es fällt auf, dass die gewonnenen Ergebnisse für den Erdradius alle deutlich zu groß sind. Die wesentliche Ursache dafür ist die Lichtbrechung in der Atmosphäre.

   Korrigieren Sie nun Ihre Ergebnisse entsprechend der im Abschnitt Theorie beschriebenen Näherung. Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung.

$$R'_{E_1} = \qquad km$$
$$R'_{E_2} = \qquad km$$
$$R'_{E_3} = \qquad km$$

   Daraus ergibt sich als gemitteltes Gesamtergebnis:

$$\overline{R_E} = \qquad km \pm \qquad km$$

5. **Zusatzaufgabe**: Den krummlinigen Verlauf des Lichtstrahls vom Horizont ins Auge des Beobachters kann man *durch Raytracing* simulieren, wenn der Brechungsindex der Luft und seine Abnahme mit zunehmender Höhe bekannt sind. Im Anhang ist der zugehörige Algorithmus beschrieben.

   Implementieren Sie diesen Algorithmus in einem Tabellenkalkulationsprogramm (z. B. Excel), indem Sie mit einem Lichtstrahl starten, der die Erdoberfläche geradlinig tangential verlässt, und diesen durch mehrere Luftschichten konstanter Dichte verfolgen, bis er die interessierende Höhe über der Erdoberfläche erreicht hat.

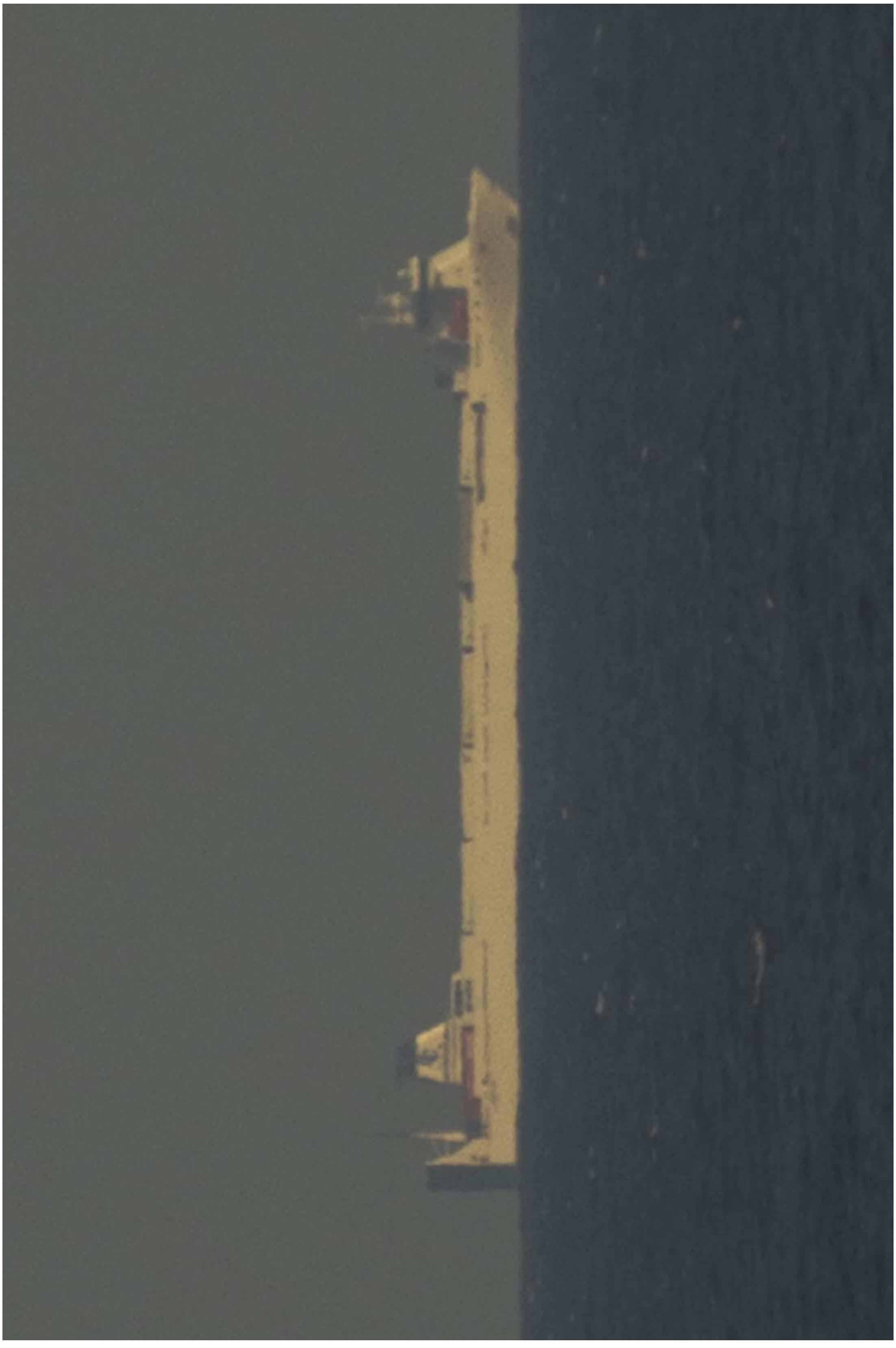

Abbildung 7: Fähre in kleier Entfernung

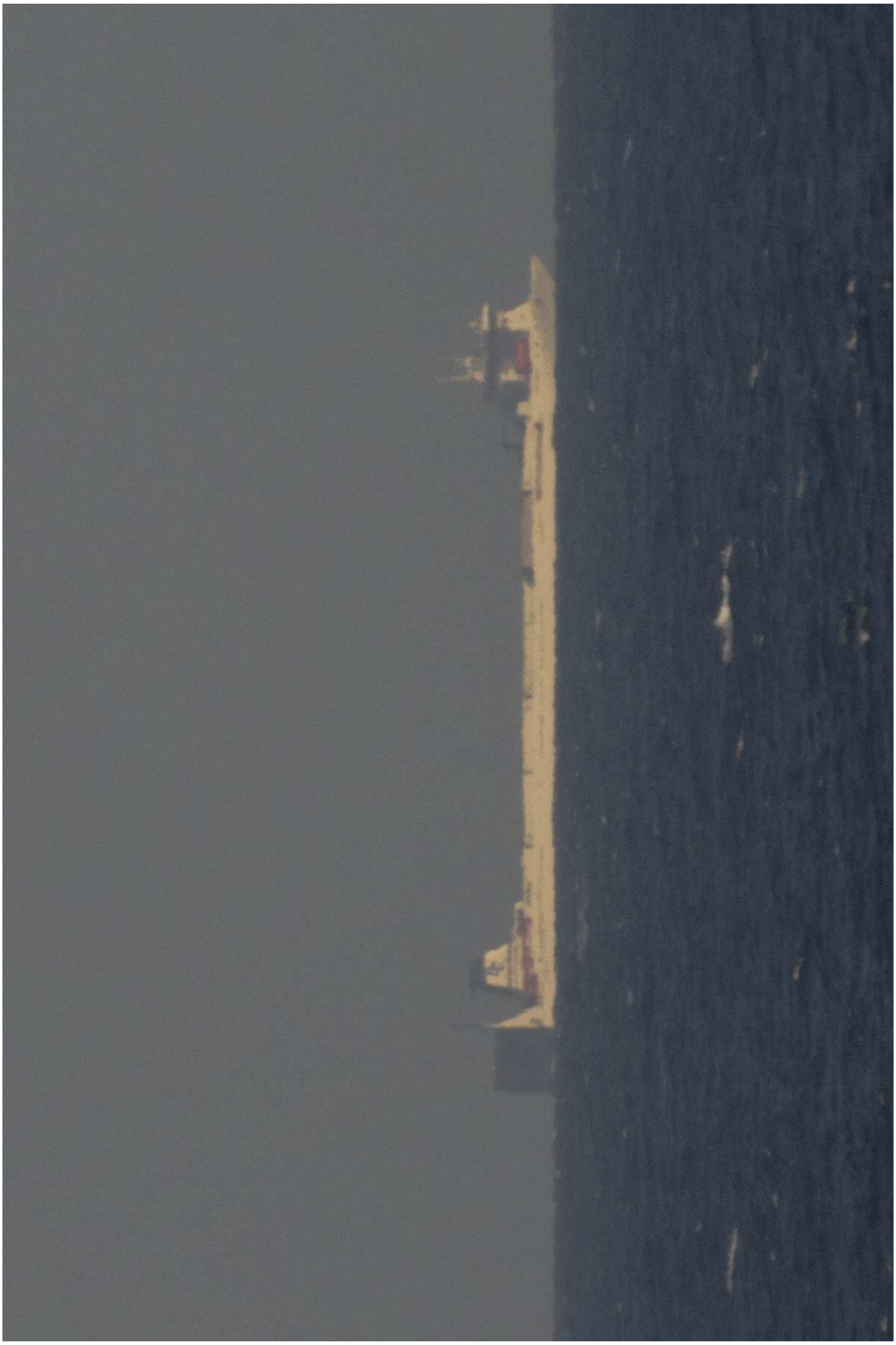

Abbildung 8: Fähre in mittlerer Entfernung

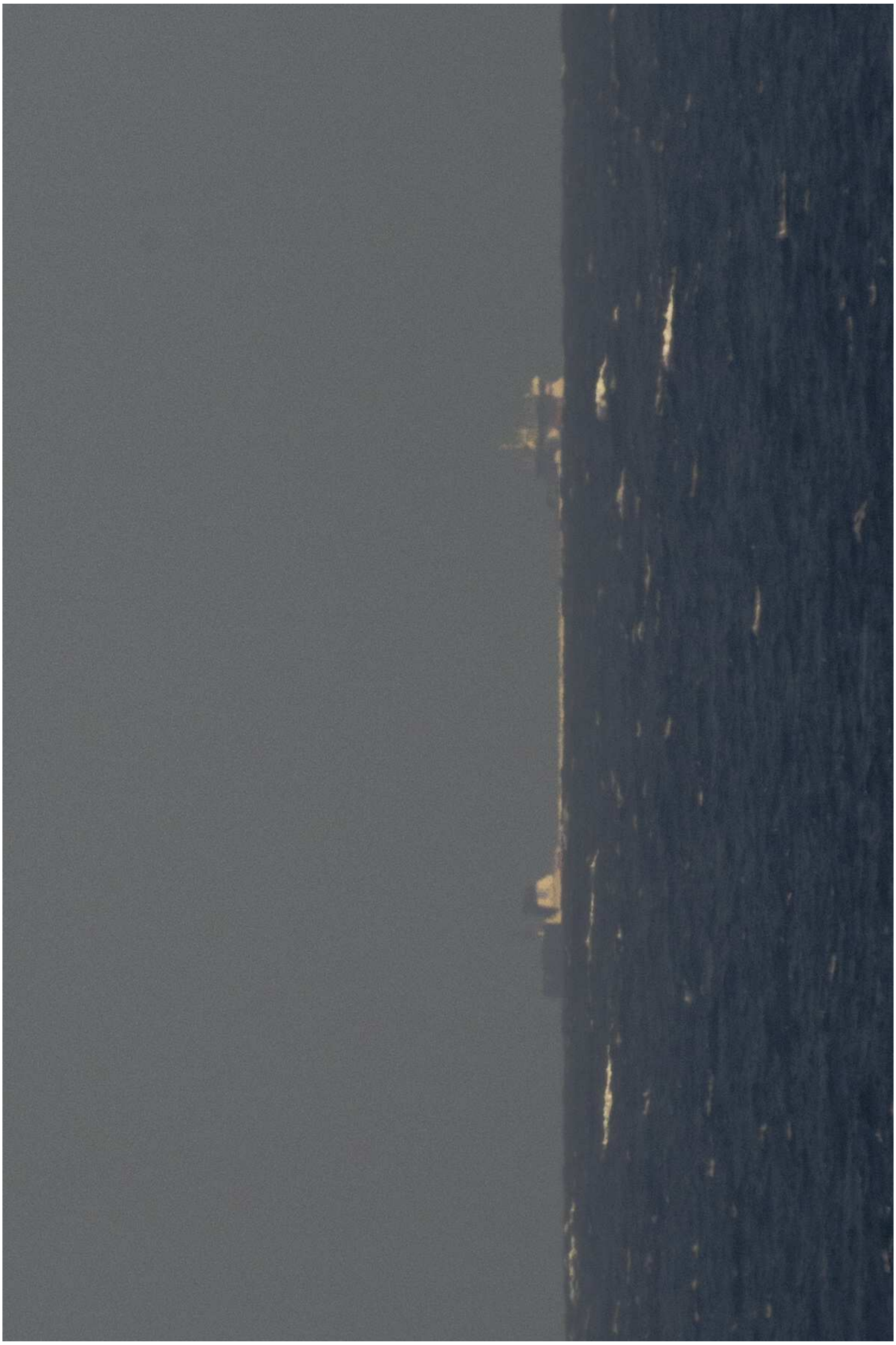

Abbildung 9: Fähre in großer Entfernung

5 Anhang: Simulation der Erweiterung der Sichtweite durch atmosphärische Lichtbrechung

Beim Blick in die Ferne trifft der Blick die Erde am Horizont tangential. Oder umgekehrt: Das Licht, das vom Horizont das Auge des Beobachters trifft, ist am Horizontpunkt horizontal ausgesendet worden. Bei seinem Weg „nach oben", d. h. mit zunehmender Entfernung zum Boden, durchquert es Luftschichten abnehmenden Luftdrucks – und damit abnehmender Brechzahl. Der Lichtweg wird dadurch simuliert, dass die Atmosphäre in diskrete Luftschichten der Dicke ΔR mit jeweils konstanter Brechzahl eingeteilt wird.

Der **Algorithmus** für die Strahlverfolgung ist im Tabellenblatt `Simulation` der Excel-Tabelle implementiert. Er lässt sich folgendermaßen beschreiben:

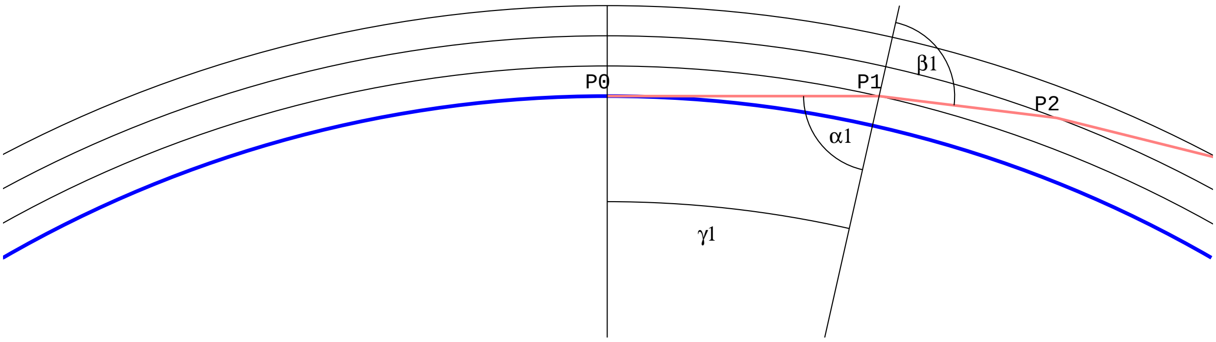

Abbildung 10: Zur Berechnung der Strahlabschnitte mit dem Brechungsgesetz

1. Der Lichtstrahl wird am Ort $P_0 = (x_0, y_0)$ an der Erdoberfläche mit der Steigung $m_i = 0$ ausgesendet.

2. Der Lichtstrahl vom Punkt P_i trifft am Ort $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ auf die erste Grenzfläche zwischen den Luftschichten i und $i + 1$. P_{i+1} lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\left.\begin{array}{r} y_{i+1} - y_i = m_i(x_{i+1} - x_i) \\ x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 = (R_E + (i+1)\Delta R)^2 =: r^2 \end{array}\right\} \implies y_{i+1} - y_i = m_i\left(\sqrt{r^2 - y_{i+1}^2} - x_i\right)$$

$$\implies \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{m_i} + x_i\right)^2 = r^2 - y_{i+1}^2$$

$$\implies \frac{y_{i+1}^2}{m_i^2} - \frac{2y_i}{m_i^2} y_{i+1} + \frac{y_i^2}{m_i^2} + 2x_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{m_i} + x_i^2 = r^2 - y_{i+1}^2 \implies$$

$$(1 + m_i^2) y_{i+1}^2 + 2(m_i x_{i+1} - y_i) y_{i+1} + y_i^2 - 2m_i x_i y_i + m_i^2 x_i^2 - m_i^2 r^2 = 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung der Form

$$A y_{i+1}^2 + B y_{i+1} + C = 0$$

Sie hat die Lösung[2]

$$y_{i+1} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC} \tag{3}$$

[2]Da die Steigung des Lichtstrahls überall nichtpositiv ist, ist hier das negative Vorzeichen zu wählen.

mit

$$A = 1 + m_i^2, \qquad B = 2(m_i x_i - y_i), \qquad C = y_i^2 - 2m_i x_i y_i - m_i^2(r^2 - x_i^2) \tag{4}$$

3. Für den Einfallswinkel α_{i+1} am Punkt P_{i+1} gilt (Abb. 10):

$$\alpha_{i+1} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{i+1} - \arctan m_i.$$

Dabei ist γ_{i+1} der zu P_{i+1} gehörende Zentralwinkel

$$\gamma_{i+1} = \arctan \frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}$$

Der Einfallswinkel lässt sich deshalb folgendermaßen berechnen:

$$\alpha_{i+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x_{i+1}}{y_{i+1}} - \arctan m_i \tag{5}$$

4. Der Brechungsindex n von Luft hängt folgendermaßen von der Temperatur T, dem Druck p und dem Dampfdruck e des enthaltenen Wassers[3] ab ([3]):

$$(n-1) \cdot 10^6 = \frac{77.6K}{T} \left(\frac{p}{bar} + \frac{4810K}{T} \frac{e}{bar} \right) \tag{6}$$

In der *isothermen* Atmosphäre hängt der Druck exponentiell von der Höhe über dem Erdboden ab (*Barometrische Höhenformel*):

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{h_s}} \qquad \text{mit} \qquad h = r - R_E,\ h_s = \frac{R}{Mg} T \tag{7}$$

Dabei sind $M = 0.02896 \frac{kg}{mol}$ die molare Masse von Luft, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung und $R = 8.314 \frac{J}{mol \cdot K}$ die universelle Gaskonstante. Die Konstante h_s wird als *Skalenhöhe* bezeichnet.

5. Nach dem Brechungsgesetz verlässt der Lichtstrahl die Grenzfläche unter dem Brechungswinkel β_{i+1}:

$$\frac{\sin \alpha_{i+1}}{\sin \beta_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i} \quad \Longrightarrow \quad \beta_{i+1} = \arcsin \left(\frac{n_i}{n_{i+1}} \sin \alpha_{i+1} \right) \tag{8}$$

Dabei sind n_i und n_{i+1} die Brechzahlen der Luftschichten i und $i+1$.

6. Der Lichtstrahl wird am Punkt P_{i+1} um den Winkel $\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}$ abgelenkt. Die Steigung des weiterlaufenden Lichtstrahls ist also

$$m_{i+1} = \tan(\arctan m_i + \alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) \tag{9}$$

[3] Bei der extrem guten Fernsicht kann von trockener Luft ($e = 0$) ausgegangen werden.

Damit sind Startpunkt P_{i+1} und Steigung m_{i+1} des folgenden geradlinigen Strahlabschnitts bekannt. Die Rechnung kann bei 1. neu beginnen.

7. Die Schritte 1 bis 6 werden so lange wiederholt, bis h die gewünschte Höhe erreicht hat. Da der Zentralwinkel γ bei den interessierenden Höhen klein bleibt, kann x_i als Sichtweite betrachtet werden.