

## Schiffe am Horizont und der Erdradius (mit Lösungen)



Abbildung 1: Unterschiedlich weit entfernte Schiffe bei Helgoland [2]

*„Daß die wegfahrenden Schiffe von dem Berg des ‚abwärts‘ gekrümmten Meeresspiegels unter den Horizont hinunterschwenden, das haben immer einige schon erfahren; auch daß jenseits großer See- und Fjordflächen der Uferstreifen verdeckt ist von dem Wasserberg, der sich dazwischen erhebt.“* (Wagenschein [4])

### 1 Einleitung

An der Küste kann man bei sehr guter Fernsicht beobachten, dass Schiffe unter dem Horizont verschwinden, wenn sie sich entfernen, bzw. dass die Aufbauten früher sichtbar werden als der Rumpf, wenn sich ein Schiff nähert (Abb. 1). Diese Erfahrung machten sich bereits die seefahrenden Menschen im Altertum zunutze, indem sie das „Krähennest“ oder den „Ausguck“ auf Schiffen möglichst hoch anbrachten, damit Küsten oder andere Schiffe in möglichst großer Entfernung entdeckt werden konnten.

Der Effekt wurde schon früh als Hinweis auf die Kugelgestalt der Erde gedeutet (Abb. 2).

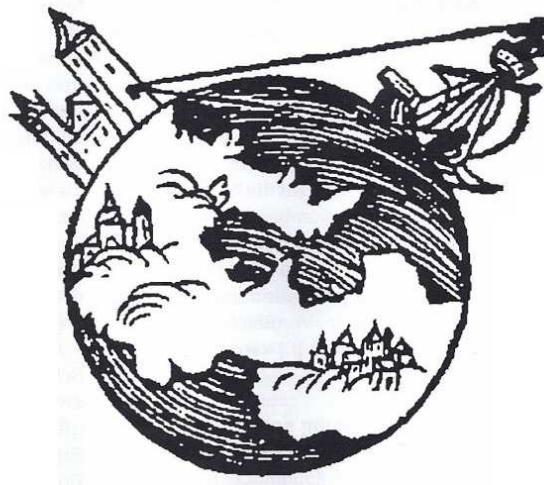


Abbildung 2: Darstellung des Zusammenhanges zwischen Erdkugel und Sichtweite aus dem Jahr 1549 (entnommen aus [1])

Wenn es gelingt, den Zusammenhang zwischen dem „Abtauchen“ eines Schiffes und seiner Entfernung zu messen, dann kann aus den Messergebnissen die Größe der Erde abgeleitet werden. Entsprechende Messungen sind allerdings äußerst schwierig, weil der Effekt erst bei Entfernungen von vielen Kilometern deutlich wird und Schiffe in solchen Entfernungen scheinbar bereits sehr klein geworden sind. Außerdem muss die Fernsicht extrem gut sein, damit die scheinbare Größe der Schiffe und ihr „Abtauchen“ gemessen werden können. Eigene jahrelange Versuche, bei Seeurlaube entsprechenden Situationen zu fotografieren, haben nie zu überzeugenden Ergebnissen geführt.

*Wolfgang Bischof* und *Burkhard Steinrücken* [1] sind solche Fotos gelungen, und sie haben gezeigt, wie durch gründliche Analyse der Bilder die Größe der Erde bestimmt werden kann. In dieser Praktikumsaufgabe sollen die dazu nötigen Überlegungen und Rechnungen anhand der Originalfotos schrittweise nachvollzogen werden.

## 2 Etwas Theorie

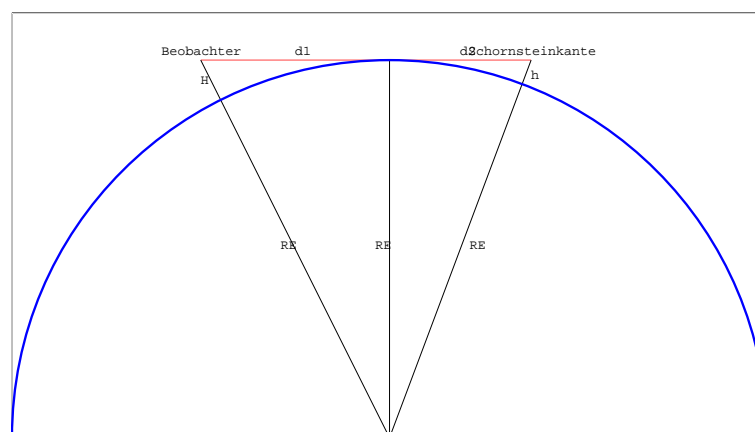


Abbildung 3: Zum Zusammenhang zwischen der Höhe  $H$  des Beobachters, seiner Sichtweite  $d_1$  bis zum Horizont und dem Radius  $R_E$  der Erde

Die Abhängigkeit der Sichtweite  $d_1$  eines Beobachters bis zum Horizont, seiner Höhe  $H$  über dem Meeresspiegel und dem Erdradius  $R_E$  ist, wenn man von der Lichtbrechung in der Atmosphäre absieht, ein einfaches geometrisches Problem: Anhand von Abbildung 3 findet man leicht den folgenden Zusammenhang:

$$d_1^2 = (R_E + H)^2 - R_E^2 = 2R_E H - H^2 \approx 2R_E H \quad (1)$$

Eine entsprechende Beziehung gilt für das anzupeilende Objekt mit der Höhe  $h$ . Fasst man die beiden Beziehungen zur Entfernung

$$d = d_1 + d_2$$

zwischen Beobachter und Objekt zusammen, ergibt sich

$$R_E = \frac{d^2}{2(H + h + 2\sqrt{Hh})} \quad (2)$$

Durch die Lichtbrechung in der Atmosphäre wird die Beziehung allerdings komplizierter: Ein sich von der Erdoberfläche entfernender Lichtstrahl wird dadurch etwas nach unten gekrümmt. Die Sichtweite zum Horizont vergrößert sich – das heißt, die Erde erscheint etwas größer, als sie in Wirklichkeit ist.

Diesen Effekt kann man näherungsweise folgendermaßen berücksichtigen ([1]): Der Lichtstrahl vom Horizont ins Auge des Beobachters wird kreisförmig mit dem Radius  $r$  angenommen, für den gilt  $\frac{R_E}{r} = 0.13 = k$ . Dadurch vergrößert sich die Sichtweite um den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{1-k}}$ , bzw. der Radius der Erde erscheint um den Faktor  $\frac{1}{1-k}$  vergrößert.

### 3 Benötigte Hilfsmittel

- Lineal mit mm-Maßstab
- Taschenrechner
- Archivbild der Fähre (Abb. 4)
- 3 Fotos der sich entfernenden Fähre (Abb. 7-9)
- Für eine Auswertung am Computer
  1. Archivbild der Fähre (**FaehreA.jpg**)
  2. Originalfotos der sich entfernenden Fähre (**Faehre1.jpg**, **Faehre2.jpg**, **Faehre3.jpg**)
  3. Excel-Tabelle zur Vereinfachung der Rechnungen ohne Lösungen (**AuswertungHorizont.xls**) und mit Lösungen (**AuswertungHorizontmL.xls**)

Diese Dateien sind in einem zip-Archiv zusammengefasst, das aus dem Netz heruntergeladen werden kann.

Zusätzlich ist ein einfaches Bildbearbeitungsprogramm erforderlich, mit dem in den Bildern pixelgenau Positionen gemessen werden können (z. B. **ImageJ**<sup>1</sup>)

---

<sup>1</sup><http://rsbweb.nih.gov/ij/>

## Literatur

- [1] Bischof, W., Steinrücken, B.: Hinter'm Horizont geht's weiter. Die Bestimmung der Erdgröße aus der Beobachtung von Schiffen am Meereshorizont, *Astronomie und Raumfahrt* 52/1, 22 (2015)
- [2] Falke, T., <http://www.duene1.de/homepage/weiss11/weiss153.htm>
- [3] Liljequist, G. H.; Cihak, K. *Allgemeine Meteorologie*, Vieweg: Braunschweig 2006
- [4] Wagenschein, M.: *Die Erfahrung des Erdballs* in: Naturphänomene sehen und verstehen – Genetische Lehrgänge. Klett, Stuttgart 1988 (<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/Erdball.pdf>)

## 4 Aufgaben (mit Lösungen)

Die folgenden Aufgaben können entweder mit den ausgedruckten Abbildungen dieser Praktikumsaufgabe oder mit einem geeigneten Bildbearbeitungsprogramm und den Digitalbildern in der Materialsammlung am Computer bearbeitet werden.

Das verwendete Fernrohr hatte eine Brennweite von  $f = 1411\text{mm}$ . Der CCD-Chip hatte eine Größe von  $b_C * h_C = 39.9\text{mm} * 24.0\text{mm}$ , die Anzahl seiner Pixel betrug  $6016 * 4016\text{Px}$ .

Die Bilder sind Ausschnitte der Größe  $2700 * 1800\text{Px}$  aus den Originalbildern.

### 1. Vorbereitung: Messen Sie den Maßstab der Bilder.

- (a) Bestimmen Sie anhand des Archivbildes (Abb. 4) der Fähre die Höhe  $h_0$  der obersten Kante des Schornsteins über der Wasseroberfläche. Verwenden Sie dazu die Länge der Fähre  $l_F = 154\text{m}$ . (Abb. 4).



Abbildung 4: Archivbild und Daten der Fähre (aus [1])

$$h_0 = 21.2\text{m}$$

**Lösung** (der Computerauswertung):

- Die Länge der Fähre auf dem Bild beträgt  $609\text{Px}$ .
- Der Maßstab  $M_A$  des Bildes ergibt sich aus der tatsächlichen Länge der Fähre zu

$$M_A = \frac{l_F}{609\text{Px}} = 0.2529 \frac{\text{m}}{\text{Px}}$$

- Der Abstand zwischen Schornsteinoberkante und Wasseroberfläche beträgt  $84Px$ . Daraus ergibt sich ihre Höhe  $h_0$  über der Wasserlinie

$$h_0 = M_A \cdot 84Px = 21.2m.$$

- (b) Bestimmen Sie den Winkelmaßstab  $M_B$  der drei Bilder der sich entfernenden Fähre.

$$\text{Maßstab der Bilder } M_B = \frac{0.872''}{Px}$$

**Lösung** (der Computerauswertung):

- Der horizontal durch den (ganzen!) Chip überdeckte Winkel beträgt

$$x_W = \arctan\left(\frac{b_C}{f}\right) = 1.457^\circ = 5247''$$

- Daraus ergibt sich der Pixelmaßstab zu

$$M_B = \frac{x_W}{b_C} = \frac{0.872''}{Px}$$

2. Messen Sie die drei Entfernungen der Fähre durch Vergleich zwischen ihrer scheinbaren (Winkel-) Größe mit ihrer tatsächlichen Länge. Berücksichtigen Sie dabei den Winkel zwischen der Sichtlinie und der Fahrtrichtung der Fähre.

- (a) Messen Sie auf den Bildern zunächst die scheinbare Breite  $b_{pr_i}$  der Heckklappe und die scheinbare Länge  $l_{pr_i}$  der Fähre (bis zur Mitte der Heckklappe).

**Lösung** (der Computerauswertung):

$$\begin{array}{ll} b_{pr_1} = 37Px & l_{pr_1} = 1357.5Px \\ b_{pr_2} = 89Px & l_{pr_2} = 1083.5Px \\ b_{pr_3} = 100Px & l_{pr_3} = 820Px \end{array}$$

- (b) Die sichtbare Heckklappe zeigt, dass sich die Fähre nicht senkrecht zur Blickrichtung fährt und dadurch verkürzt erscheint.

Bestimmen Sie die zu den drei Bildern gehörenden Projektionswinkel  $\alpha_i$ .

**Tipp:** Nehmen Sie der Einfachheit halber an, der Rumpf der Fähre habe einen dreieckigen Querschnitt.

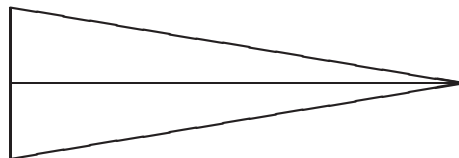


Abbildung 5: Vereinfachter Querschnitt der Fähre

**Lösung** (der Computerauswertung): Für die projizierten Längen gilt:  $b_{pr} = b \sin \alpha$  und  $l_{pr} = l \cos \alpha$ . Daraus folgt:

$$\tan \alpha = \frac{l}{b} \frac{b_{pr}}{l_{pr}}$$

$$\begin{aligned}\tan \alpha_1 &= \frac{154}{22} \frac{37}{1357.5} = 0.19 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 11^\circ \\ \tan \alpha_2 &= \frac{154}{22} \frac{89}{1083.5} = 0.57 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 30^\circ \\ \tan \alpha_3 &= \frac{154}{22} \frac{100}{820} = 0.85 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 40^\circ\end{aligned}$$

- (c) Leiten Sie nun aus den Projektionswinkeln die scheinbaren Längen  $l'_i$  der Fähre auf den drei Bildern ab, d. h. die Länge, die die Fähre auf den Bildern hätte, wenn sie senkrecht zur Sichtlinie führe, und berechnen Sie daraus ihre jeweilige Entfernung.

**Lösung** (der Computerauswertung): Zunächst die (Winkel-) Längen der Fähre ... ,

$$l_i = \frac{l_{pr_i}}{\cos \alpha_i}$$

$$\begin{aligned}l_1 &= 1382Px \hat{=} 1205'' \\ l_2 &= 1250Px \hat{=} 1090'' \\ l_3 &= 1078Px \hat{=} 940''\end{aligned}$$

... dann ihre Entfernungen:

$$d_i = \frac{l_F}{\tan l_i}$$

$$\begin{aligned}d_1 &= 26354m \\ d_2 &= 29141m \\ d_3 &= 33781m\end{aligned}$$

3. Messen Sie die Höhen  $h'_i$  der Schornsteinkante über der Kimm, und leiten Sie daraus die Höhen  $h_i$  der Kimmlinie über der Wasseroberfläche ab.

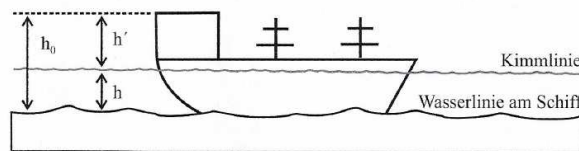


Abbildung 6: Zur Ermittlung der Höhe  $h$  der Kimmlinie über der Wasseroberfläche (aus [1])

**Lösung** (der Computerauswertung): Die Höhen der Schornsteinoberkante über der Kimmlinie betragen, zunächst in Bogensekunden:

$$\begin{aligned}h'_1 &= 160Px \hat{=} 140'' \\ h'_2 &= 115Px \hat{=} 100'' \\ h'_3 &= 50Px \hat{=} 44''\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich zunächst die Höhen der Schornsteinoberkante aus den entsprechenden Entfernungen gemäß  $d_i \tan h'_i$  in Metern und dann die Höhen  $h_i$  der Kimmlinien aus  $h_i = h_0 - h'_i$ :

$$\begin{aligned} h'_1 = 18.2m &\implies h_1 = 3.1m \\ h'_2 = 16.3m &\implies h_2 = 4.9m \\ h'_3 = 9.4m &\implies h_3 = 11.9m \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie aus der Hebung der Kimmlinie und der Entfernung der Fähre den Radius der Erde.

- (a) Verwenden Sie zunächst die aus geometrischen Überlegungen gewonnene Gleichung (2).

**Lösung** (der Computerauswertung): Der Erdradius lässt sich nun mit Hilfe von Gleichung (2) berechnen:

$$\begin{aligned} R_{E_1} &= 7404km \\ R_{E_2} &= 7238km \\ R_{E_3} &= 7444km \end{aligned}$$

- (b) Es fällt auf, dass die gewonnenen Ergebnisse für den Erdradius alle deutlich zu groß sind. Die wesentliche Ursache dafür ist die Lichtbrechung in der Atmosphäre.

Korrigieren Sie nun Ihre Ergebnisse entsprechend der im Abschnitt Theorie beschriebenen Näherung. Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} R'_{E_i} &= R_i(1 - k) \implies \\ R'_{E_1} &= 6444km \\ R'_{E_2} &= 6297km \\ R'_{E_3} &= 6476km \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als gemitteltes Gesamtergebnis:

$$\overline{R_E} = 6406km \pm 78km$$

5. **Zusatzaufgabe:** Den krummlinigen Verlauf des Lichtstrahls vom Horizont ins Auge des Beobachters kann man *durch Raytracing* simulieren, wenn der Brechungsindex der Luft und seine Abnahme mit zunehmender Höhe bekannt sind. Im Anhang ist der zugehörige Algorithmus beschrieben.

Implementieren Sie diesen Algorithmus in einem Tabellenkalkulationsprogramm (z. B. Excel), indem Sie mit einem Lichtstrahl starten, der die Erdoberfläche geradlinig tangential verlässt, und diesen durch mehrere Luftschichten konstanter Dichte verfolgen, bis er die interessierende Höhe über der Erdoberfläche erreicht hat.



**Lösung** (mit dem Tabellenblatt „Simulation“ der Excel-Tabelle „AuswertungHorizontmL.xls“)

Mit dem korrekten Wert für den Erdradius ergeben sich aus der Höhe des Beobachters und den Hebungen der Kimmlinien die folgenden Entfernungen der Fähren: .

$$\begin{aligned}d_{1_{sim}} &= 26400m \\d_{2_{sim}} &= 28500m \\d_{3_{sim}} &= 33300m\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse stimmen gut mit den aus den scheinbaren Längen der Fähren berechneten Werten überein.

Um mit dieser Simulation umgekehrt den Erdradius zu bestimmen, kann man den Erdradius – ausgehend von einem Näherungswert – solange variieren, bis der Ausdruck

$$(d_1 - d_{1_{sim}})^2 + (d_2 - d_{2_{sim}})^2 + (d_3 - d_{3_{sim}})^2$$

minimal geworden ist.

Auf diese Weise ergibt sich der Erdradius zu

$$\mathbf{R_{E_{sim}} \approx 6500km.}$$

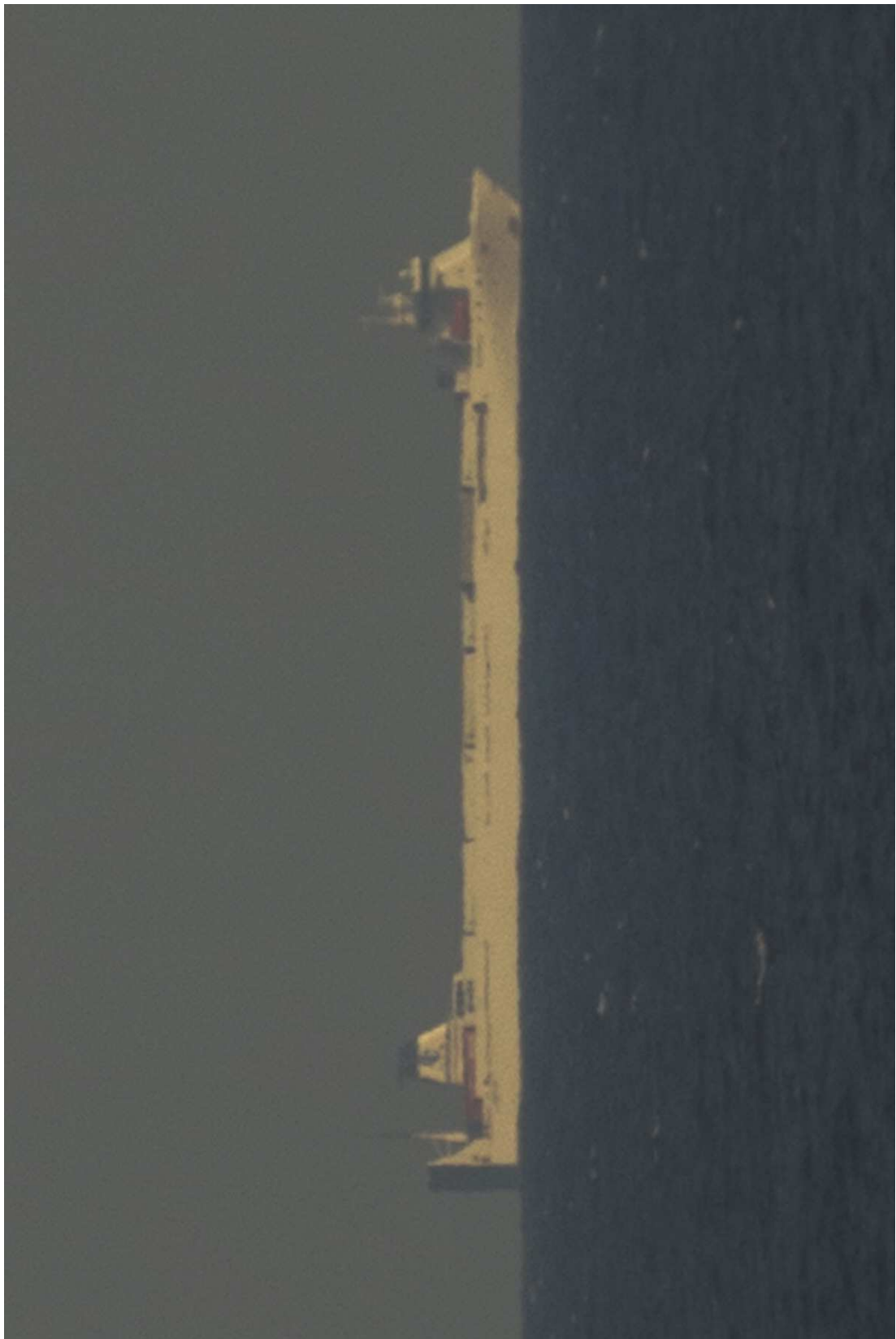


Abbildung 7: Fähre in kleiner Entfernung

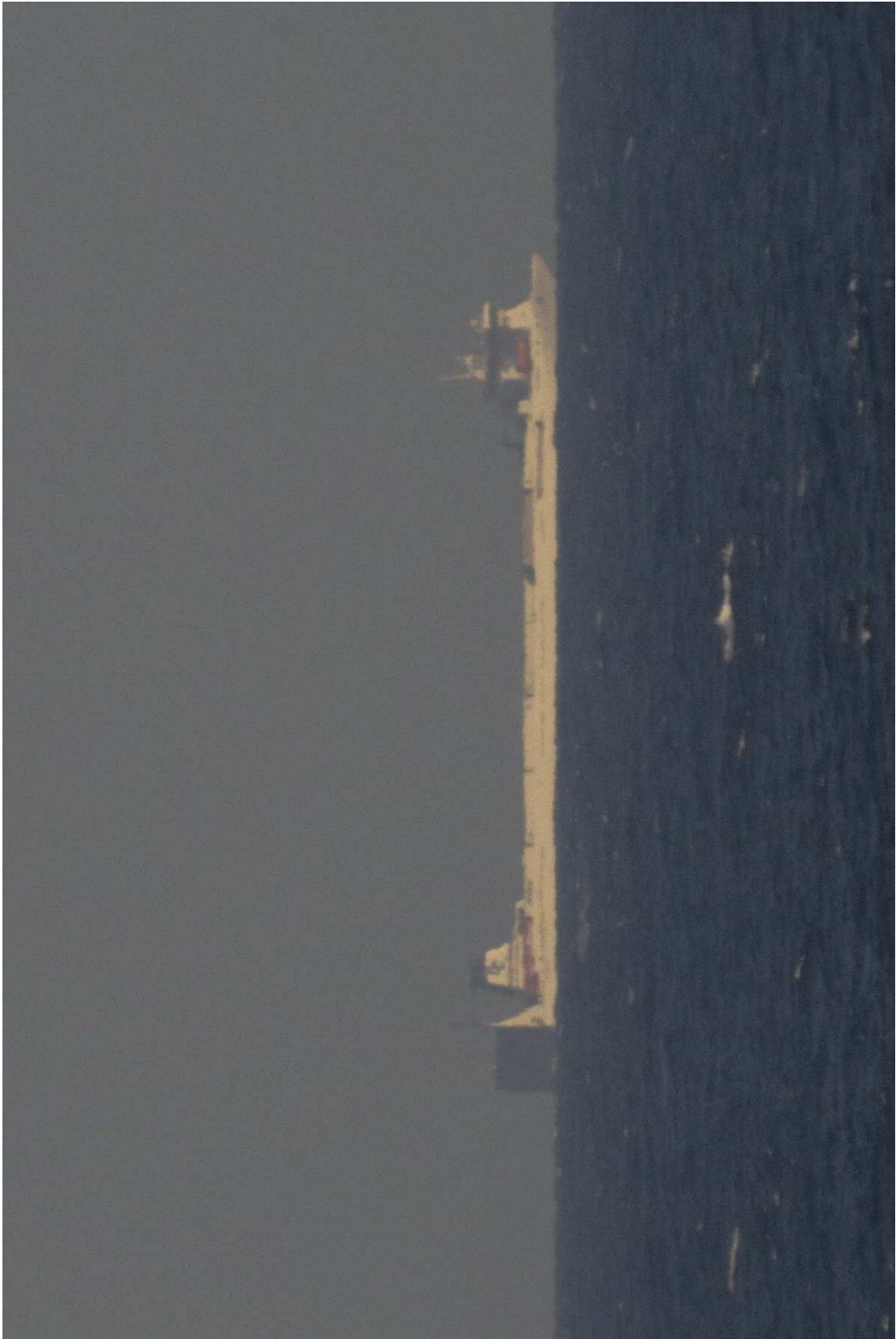


Abbildung 8: Fähre in mittlerer Entfernung

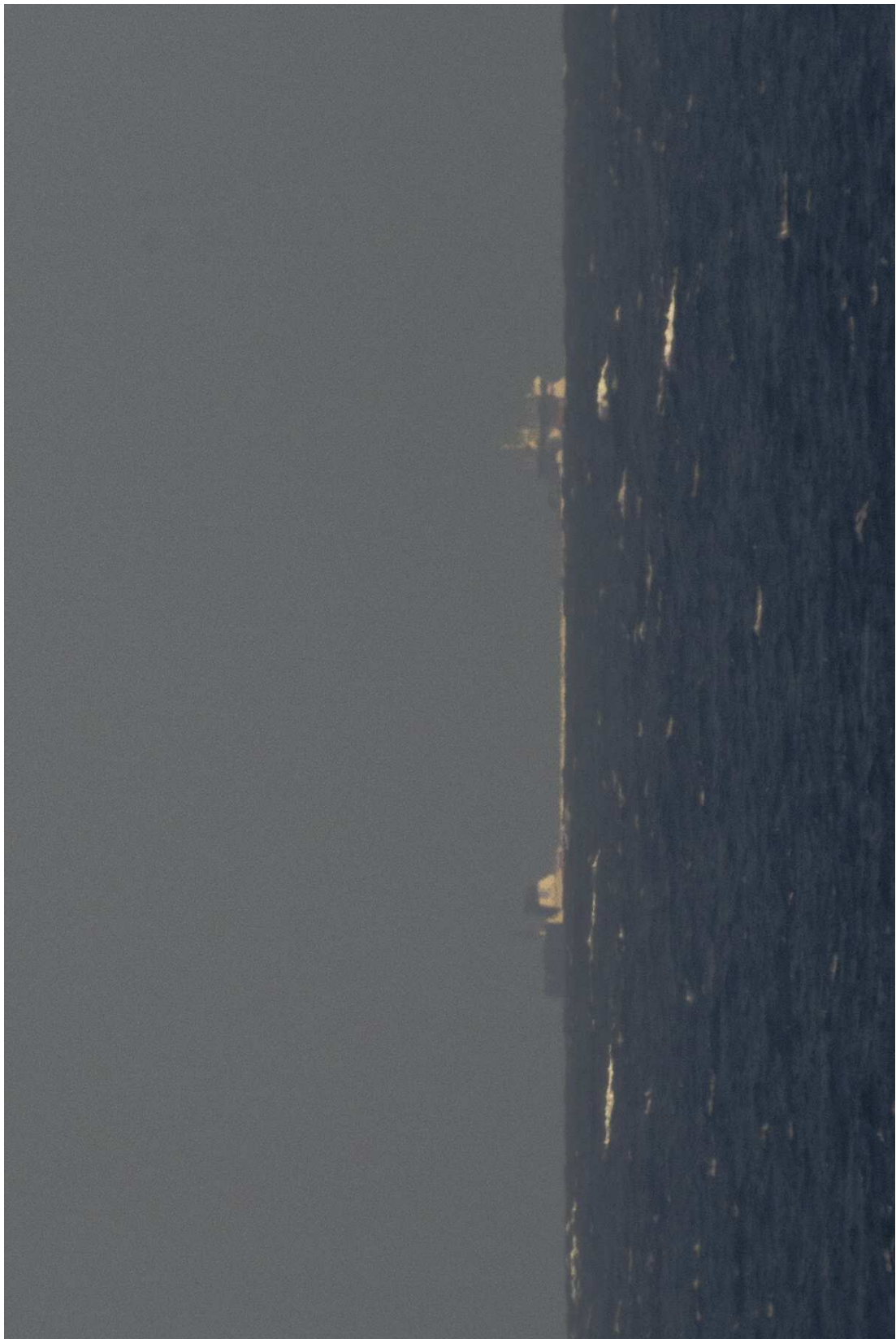


Abbildung 9: Fähre in großer Entfernung

## 5 Anhang: Simulation der Erweiterung der Sichtweite durch atmosphärische Lichtbrechung

Beim Blick in die Ferne trifft der Blick die Erde am Horizont tangential. Oder umgekehrt: Das Licht, das vom Horizont das Auge des Beobachters trifft, ist am Horizontpunkt horizontal ausgesendet worden. Bei seinem Weg „nach oben“, d. h. mit zunehmender Entfernung zum Boden, durchquert es Luftschichten abnehmenden Luftdrucks – und damit abnehmender Brechzahl. Der Lichtweg wird dadurch simuliert, dass die Atmosphäre in diskrete Luftschichten der Dicke  $\Delta R$  mit jeweils konstanter Brechzahl eingeteilt wird.

Der **Algorithmus** für die Strahlverfolgung ist im Tabellenblatt **Simulation** der Excel-Tabelle implementiert. Er lässt sich folgendermaßen beschreiben:

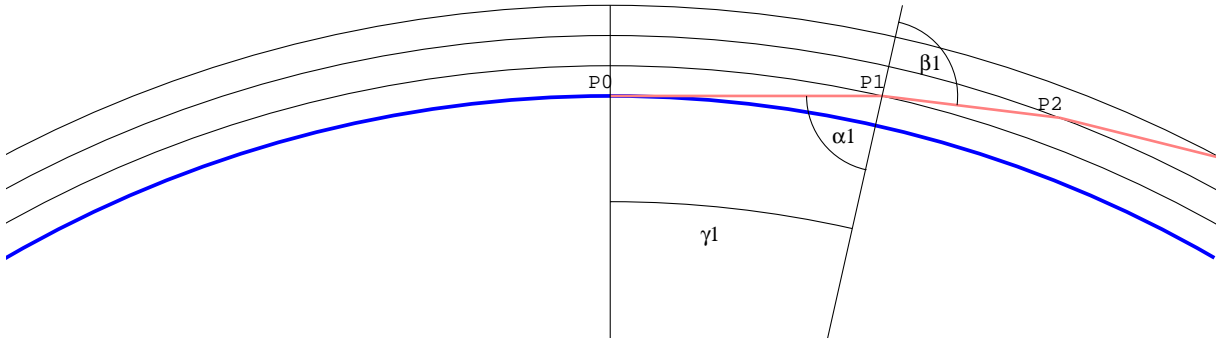


Abbildung 10: Zur Berechnung der Strahlabschnitte mit dem Brechungsgesetz

1. Der Lichtstrahl wird am Ort  $P_0 = (x_0, y_0)$  an der Erdoberfläche mit der Steigung  $m_i = 0$  ausgesendet.
2. Der Lichtstrahl vom Punkt  $P_i$  trifft am Ort  $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$  auf die erste Grenzfläche zwischen den Luftschichten  $i$  und  $i + 1$ .  $P_{i+1}$  lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} - y_i &= m_i(x_{i+1} - x_i) \\ x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 &= (R_E + (i+1)\Delta R)^2 =: r^2 \end{aligned} \right\} \implies y_{i+1} - y_i = m_i \left( \sqrt{r^2 - y_{i+1}^2} - x_i \right)$$

$$\implies \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{m_i} + x_i \right)^2 = r^2 - y_{i+1}^2$$

$$\implies \frac{y_{i+1}^2}{m_i^2} - \frac{2y_i}{m_i^2}y_{i+1} + \frac{y_i^2}{m_i^2} + 2x_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{m_i} + x_i^2 = r^2 - y_{i+1}^2 \implies$$

$$(1 + m_i^2)y_{i+1}^2 + 2(m_ix_{i+1} - y_i)y_{i+1} + y_i^2 - 2m_ix_iy_{i+1} + m_i^2x_i^2 - m_i^2r^2 = 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung der Form

$$Ay_{i+1}^2 + By_{i+1} + C = 0$$

Sie hat die Lösung<sup>2</sup>

$$y_{i+1} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC} \quad (3)$$

<sup>2</sup>Da die Steigung des Lichtstrahls überall nichtpositiv ist, ist hier das negative Vorzeichen zu wählen.

mit

$$A = 1 + m_i^2, \quad B = 2(m_i x_i - y_i), \quad C = y_i^2 - 2m_i x_i y_i - m_i^2(r^2 - x_i^2) \quad (4)$$

3. Für den Einfallswinkel  $\alpha_{i+1}$  am Punkt  $P_{i+1}$  gilt (Abb. 10):

$$\alpha_{i+1} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{i+1} - \arctan m_i.$$

Dabei ist  $\gamma_{i+1}$  der zu  $P_{i+1}$  gehörende Zentralwinkel

$$\gamma_{i+1} = \arctan \frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}$$

Der Einfallswinkel lässt sich deshalb folgendermaßen berechnen:

$$\alpha_{i+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x_{i+1}}{y_{i+1}} - \arctan m_i \quad (5)$$

4. Der Brechungsindex  $n$  von Luft hängt folgendermaßen von der Temperatur  $T$ , dem Druck  $p$  und dem Dampfdruck  $e$  des enthaltenen Wassers<sup>3</sup> ab ([3]):

$$(n - 1) \cdot 10^6 = \frac{77.6K}{T} \left( \frac{p}{\text{bar}} + \frac{4810K}{T} \frac{e}{\text{bar}} \right) \quad (6)$$

In der *isothermen* Atmosphäre hängt der Druck exponentiell von der Höhe über dem Erdboden ab (*Barometrische Höhenformel*):

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{h_s}} \quad \text{mit} \quad h = r - R_E, \quad h_s = \frac{R}{Mg} T \quad (7)$$

Dabei sind  $M = 0.02896 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$  die molare Masse von Luft,  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  die Erdbeschleunigung und  $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$  die universelle Gaskonstante. Die Konstante  $h_s$  wird als *Skalenhöhe* bezeichnet.

5. Nach dem Brechungsgesetz verlässt der Lichtstrahl die Grenzfläche unter dem Brechungswinkel  $\beta_{i+1}$ :

$$\frac{\sin \alpha_{i+1}}{\sin \beta_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i} \implies \beta_{i+1} = \arcsin \left( \frac{n_i}{n_{i+1}} \sin \alpha_{i+1} \right) \quad (8)$$

Dabei sind  $n_i$  und  $n_{i+1}$  die Brechzahlen der Luftschichten  $i$  und  $i + 1$ .

6. Der Lichtstrahl wird am Punkt  $P_{i+1}$  um den Winkel  $\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}$  abgelenkt. Die Steigung des weiterlaufenden Lichtstrahls ist also

$$m_{i+1} = \tan(\arctan m_i + \alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) \quad (9)$$

---

<sup>3</sup>Bei der extrem guten Fernsicht kann von trockener Luft ( $e = 0$ ) ausgegangen werden.

Damit sind Startpunkt  $P_{i+1}$  und Steigung  $m_{i+1}$  des folgenden geradlinigen Strahlabschnitts bekannt. Die Rechnung kann bei 1. neu beginnen.

7. Die Schritte 1 bis 6 werden so lange wiederholt, bis  $h$  die gewünschte Höhe erreicht hat. Da der Zentralwinkel  $\gamma$  bei den interessierenden Höhen klein bleibt, kann  $x_i$  als Sichtweite betrachtet werden.