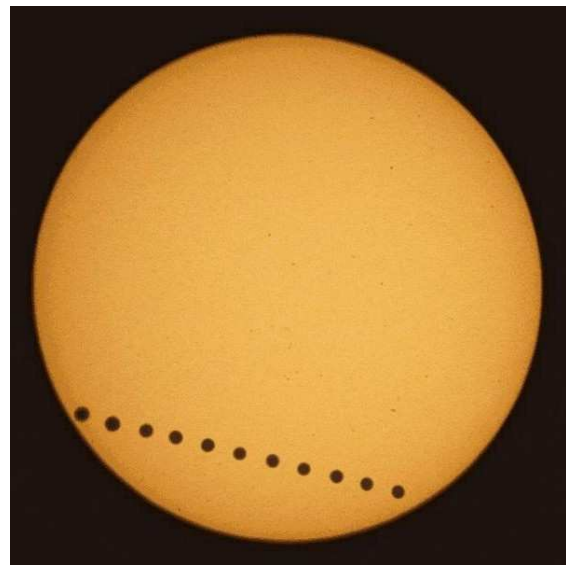
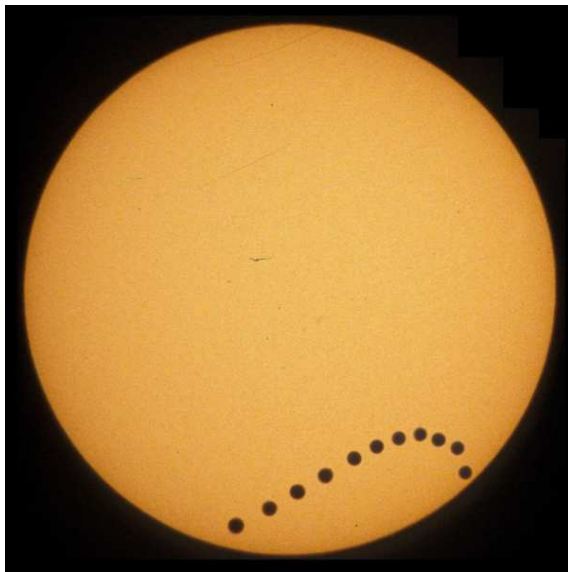


Messung der Astronomischen Einheit durch Beobachtung und Auswertung eines Venustransits

(mit Lösungen)



Serienaufnahme des Transits aus Essen. Links: Bilder mit horizontaler Unterkante, rechts: Bilder so gedreht, dass Seitenkante exakt (Himmels-) Süd-Nord

1 Einleitung

Am 8. Juni 2004 und am 5./6. Juni 2012 zog Venus, von der Erde aus betrachtet, von Ost nach West vor der Sonnenscheibe vorbei. Solche *Venustransits* gehören zu den seltensten exakt vorhersagbaren astronomischen Ereignissen: Kein heute lebender Mensch hatte vor 2004 schon einen solchen beobachtet, weil im gesamten vergangenen Jahrhundert kein einziger stattfand, und der nächste Transit wird erst im Jahre 2117 zu verfolgen sein. Vor 2004 waren überhaupt nur fünf Venustransits von Menschen beobachtet worden (1639, 1761, 1769, 1872, 1882).

Venusdurchgänge haben in der Entwicklung der modernen Astronomie eine zentrale Rolle gespielt, weil aus ihrer Vermessung für ca. 100 Jahre der genaueste Wert für die Entfernung zur Sonne gewonnen wurde.

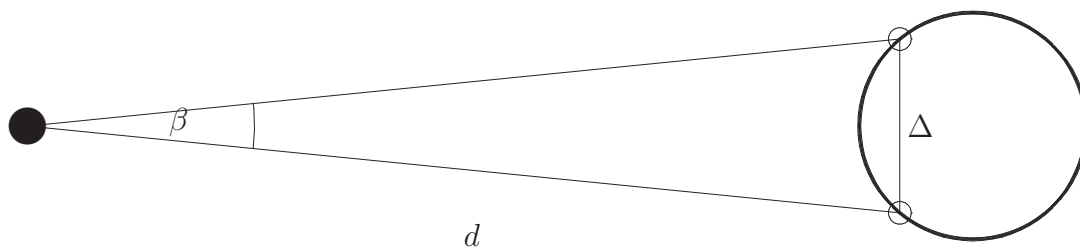


Abbildung 1: Zum Zusammenhang zwischen der Parallaxe β eines Objektes, dem Abstand der Beobachtungsorte Δ und der Objektentfernung d

2 Etwas Theorie

2.1 Die geometrische Parallaxe

Wenn man an der ausgestreckten Hand einen Gegenstand, z.B. einen Apfel, vor sich hält, ein Auge schließt und den Kopf hin- und herbewegt, beobachtet man, dass sich der Apfel scheinbar vor den weit entfernten Gegenständen der Umgebung bewegt, und zwar immer gerade in der entgegengesetzten Richtung wie der eigene Kopf. Diese scheinbare Positionsveränderung, die so genannte *parallaktische Bewegung*, beruht auf der sich ändernden Blickrichtung.

Dieser Parallaxeneffekt ist umso kleiner, je weiter der Gegenstand entfernt ist. Er kann deshalb zur Entfernungsbestimmung herangezogen werden.

Die Parallaxen β eines Gegenstandes ist der Unterschied in den Blickrichtungen zweier Beobachter, die ihn ansehen. Oder anders ausgedrückt: β ist der Winkel, unter dem der Abstand Δ der beiden „Aufnahmeorte“, z.B. der beiden Augen oder der beiden Observatorien, von dem Gegenstand aus erscheinen (Abb. 1). Steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Richtung zum Gegenstand, dann gilt offensichtlich die folgende Beziehung:

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{\Delta}{2}}{d} \implies d = \frac{\frac{\Delta}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}}$$

Ist die Entfernung sehr groß, der Parallaxenwinkel β sehr klein, dann gilt näherungsweise

$$d \stackrel{\beta \ll 1}{\approx} \frac{\Delta}{\beta} \quad (1)$$

wenn β im Bogenmaß eingesetzt wird.

Die Messung der so genannten *trigonometrischen Parallaxe* ist auch heute noch das sicherste Verfahren, die Entfernungen astronomischer Objekte zu bestimmen (Abb. 2).

Die Parallaxe π eines Objektes des Sonnensystems ist der Winkel, unter dem, von dem Objekt aus gesehen, der Erdradius erscheint¹.

¹Bei Objekten außerhalb des Sonnensystems, z.B. Fixsternen, bezieht sich die Parallaxe auf den Radius der Erdbahn, also auf die Entfernung zwischen Erde und Sonne.

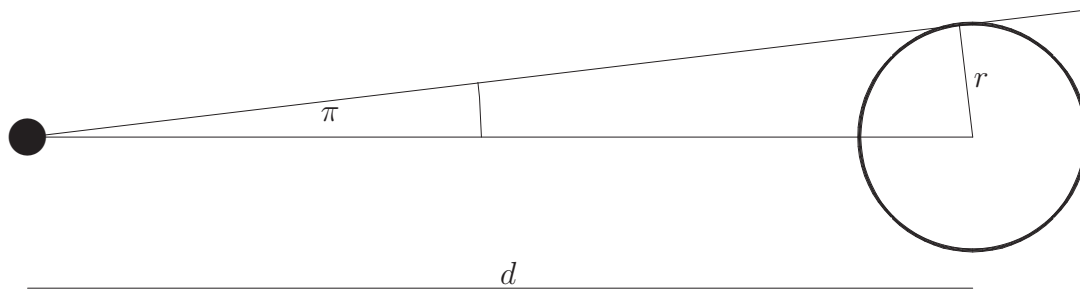


Abbildung 2: Die Parallaxe π eines Objektes, der Erdradius r und der Abstand d des Objektes d

2.2 Die Parallaxe der Sonne

Die Sonne ist sehr weit entfernt, ihre Parallaxe deshalb sehr klein: Sie beträgt nur $8''.8$. Das ist der Winkel, unter dem uns eine kleine Münze in 230 m Entfernung erscheint! Erschwerend kommt hinzu, dass kein Hintergrund sichtbar ist, wenn die Sonne am Himmel steht. Es ist deshalb bis heute unmöglich, die Sonnenparallaxe direkt geometrisch zu bestimmen.

Die Grundidee der geometrischen Messung der Entfernung zur Sonne besteht darin, die Parallaxe eines anderen Körpers des Sonnensystems zu bestimmen und dessen Entfernung anschließend, z.B. mit Hilfe des 3. Kepler'schen Gesetzes, auf die Sonnenentfernung hochzurechnen.

Venus kommt in der unteren Konjunktion der Erde deutlich näher als alle anderen Planeten. Allerdings ist sie in dieser Stellung in der Regel unbeobachtbar. Bei den sehr seltenen Transits allerdings ist sie vor der Sonne gut zu sehen und ihre Position relativ zur Sonnenscheibe im Prinzip auch gut messbar. Deshalb machte Halley 1716 den Vorschlag, den nächsten Venustransit des Jahres 1761 von den verschiedensten Orten der Erde aus zu vermessen, um die Sonnenentfernung so genau wie möglich zu bestimmen.

2.3 Geometrie des Venustransits

Für zwei Beobachter an verschiedenen Orten der Erde sieht ein Venusdurchgang unterschiedlich aus: Die Venus tritt zu etwas unterschiedlichen Uhrzeiten vor die Sonne und verlässt sie nicht gleichzeitig. Und im selben Moment hat die Venus nicht genau dieselbe Position auf der Sonnenscheibe. Dieser Parallaxeneffekt kann bemerkt werden, wenn zwei simultan aufgenommene Fotos des Ereignisses auf dieselbe Größe skaliert und mit derselben Orientierung übereinander gelegt werden (Abb. 3).

Wie kann aus dieser Positionsveränderung der Venus auf ihren Abstand von der Erde und schließlich auf die Entfernung zwischen Erde und Sonne geschlossen werden?

Am Himmel können nur Winkel beobachtet und gemessen werden. So hat für die beiden Beobachter die Venus unterschiedliche Positionen relativ zur Sonnenscheibe, in der in Abb. 3 dargestellten Situation z.B. verschiedene Winkelabstände β_1 bzw. β_2 von der Sonnenmitte (Abb. 4). Diese beiden Winkel können Abbildung 3 entnommen werden, wenn man den Abbildungsmaßstab mit Hilfe des Durchmessers der Sonnenscheibe bestimmt. Der Abstand der beiden Venusscheibchen relativ zur Sonne ist dann gerade die Winkeldifferenz $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$.

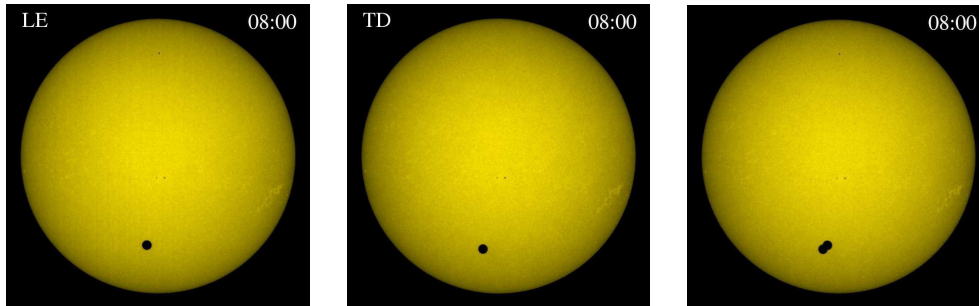


Abbildung 3: An verschiedenen Orten der Erde (Learmonth, Australien, und Teneriffa) simultan aufgenommene Fotos von Venus vor der Sonne. Der Parallaxeneffekt wird erst sichtbar, wenn die Bilder übereinander gelegt werden.

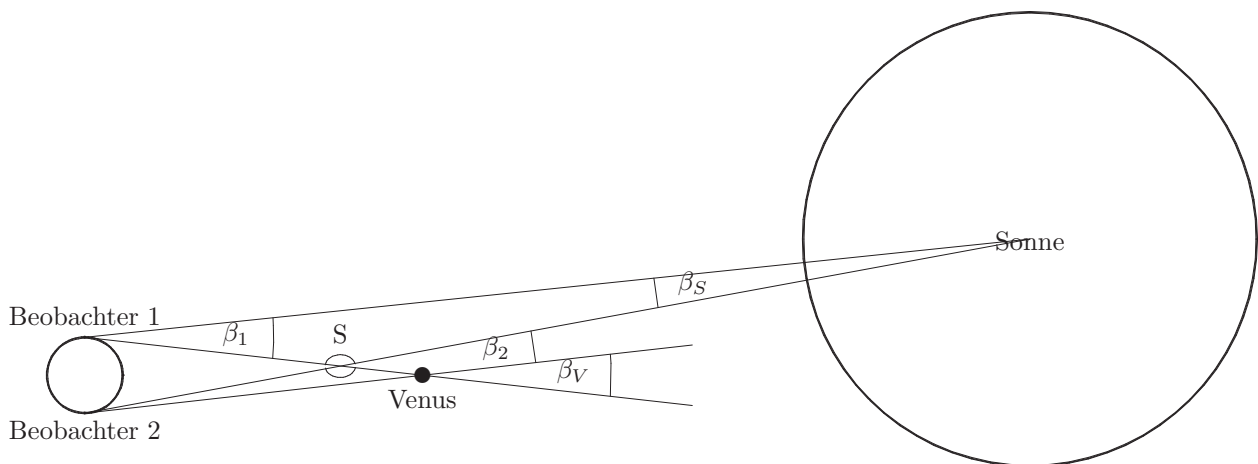


Abbildung 4: Für die beiden Beobachter hat Venus unterschiedliche Positionen relativ zur Sonnenscheibe, hier dargestellt als Winkelabstände β_1 bzw. β_2 von der Sonnenmitte.

Da auch die Sonne in unterschiedlichen Richtungen gesehen wird, ist $\Delta\beta$ nicht der Parallaxenwinkel β_V der Venus. Er ist vielmehr um den Parallaxenwinkel β_S der Sonne kleiner, wie sich aus der folgenden Überlegung ergibt: Man entnimmt der Abbildung 4 die folgende Gleichung:

$$\beta_S + \beta_1 = \beta_V + \beta_2 \quad (2)$$

Beide Winkelsummen ergänzen nämlich – einmal im Dreieck Beobachter 1 - S - Sonnenmittelpunkt, andernfalls im Dreieck Beobachter 2 - S - Venus – die bei S eingezeichneten Scheitelwinkel zu 180° . Die Beziehung kann man auch folgendermaßen schreiben, um obige Behauptung zu bestätigen:

$$\Delta\beta = \beta_V - \beta_S \quad (3)$$

2.4 Ableitung der Sonnenentfernung

Da die interessierenden Entfernungen im Vergleich zum Durchmesser der Erde sehr groß, die entsprechenden Parallaxen also sehr klein sind, verhalten sich die Parallaxenwinkel umgekehrt wie die Entfernungen d_V bzw. d_S der Venus bzw. der Sonne zur Erde:

$$\frac{\beta_V}{\beta_S} = \frac{d_S}{d_V} \quad (4)$$

Bezeichnet man die Radien der Bahnen von Erde und Venus um die Sonne als r_E bzw. r_V , dann wird schließlich aus (3):

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \frac{r_E}{r_E - r_V} \beta_S - \beta_S = \frac{r_V}{r_E - r_V} \beta_S \\ \implies \beta_S &= \left(\frac{r_E}{r_V} - 1 \right) \Delta\beta \end{aligned} \quad (5)$$

In dem in Abbildung 4 dargestellten Spezialfall ist der Abstand der beiden Beobachter doppelt so groß wie der Erdradius, der Parallaxenwinkel β_S also doppelt so groß wie die auf den Erdradius bezogene Sonnenparallaxe π_S . Im allgemeinen Fall muss man den Abstand Δ der beiden Beobachter als Vielfaches des Erdradius kennen, genauer: den Abstand Δ_\perp , den die beiden Beobachter *senkrecht* zur Richtung Erde-Sonne haben (Abb. 5).

Damit ergibt sich zunächst

$$\beta_S = \frac{\Delta_\perp}{R_E} \pi_S = \frac{\Delta \sin w}{R_E} \pi_S$$

und schließlich

$$\pi_S = \frac{R_E}{\Delta \sin w} \left(\frac{r_E}{r_V} - 1 \right) \Delta\beta. \quad (6)$$

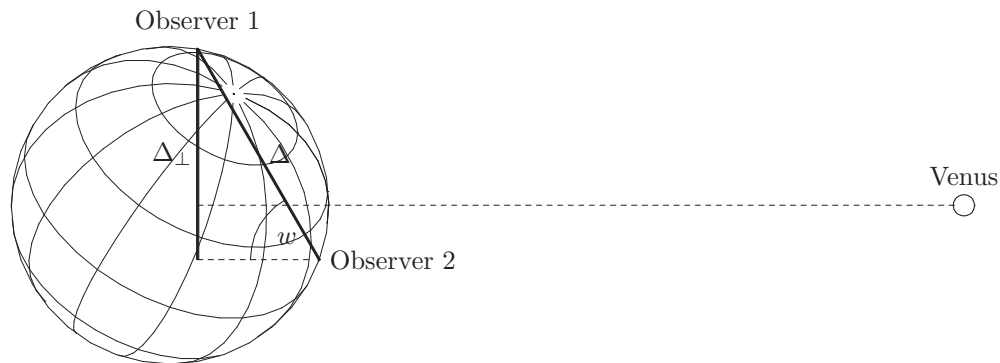


Abbildung 5: Für die Bestimmung der Sonnenparallaxe kommt es nicht auf den Abstand Δ der beiden Beobachter an, sondern auf dessen Projektion Δ_{\perp} parallel zur Richtung zur Venus.

Der Abstand zwischen Erde und Sonne $d_S = r_E$ ergibt sich daraus mit Hilfe von (1) gemäß

$$d_S = \frac{R_E}{\pi_S} \quad (7)$$

als Vielfaches des Erdradius.

3 benötigte Hilfsmittel

- Lineal und Geodreieck
- Fotos vom Venustransit 2004:
 - Essen, 8.00 UT (Abb. 8, S. 15)
 - Namibia, IAS, 8.00 UT (Abb. 9, S. 16)
- Schablone auf Folie zur Bestimmung der Mitte der Sonnenbilder (Abb. 10, S. 17)
- Millimeterpapier zur Messung des parallaktischen Winkels (Abb. 11, S. 18)
- wasserlöslicher Folienstift
- Taschenrechner
- für die Computerauswertung die folgenden Dateien:
 - Amateurfotos
Essen0800.jpg (<http://www.venus2012.de/venusprojects/photography/example/bilder/Essen0800.jpg>) und
Namibia0800.jpg (<http://www.venus2012.de/venusprojects/photography/example/bilder/Namibia0800.jpg>)

- Zum Ausmessen der Bilder das Programm **evaltransitpicts**
(<http://www.venus2012.de/stuff/evaltransitpicts.zip>),
- Zur Berechnung der Sonnenentfernung aus den gemessenen Venuspositionen
die Exceltabelle **comp2Venuspositions.xls**
(<http://www.venus2012.de/stuff/comp2Venuspositions.xls>),
(Die Lösungen befinden sich in [comp2VenuspositionsEssenNamibiaAufgabe.xls](#))
- GONG-Fotos
Learmonth0800.jpg (<http://www.venus2012.de/Bilder/Learmonth0800.jpg>)
und
Teide0800.jpg (<http://www.venus2012.de/Bilder/Teide0800.jpg>)

Alle Dateien sind auch als zip-Archiv **MaterialVenustransitaufgabe.zip** verfügbar.

Literatur

- [1] U. Backhaus, *Der Venustransit 2004 – Beobachtung und Messung der Sonnenparallaxe – (vorläufige Version)*,
<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/Venusproject/Transit.pdf>

4 Aufgaben (mit Lösungen)

In dieser Praktikumsaufgabe werden beispielhaft Amateurfotos ausgewertet, die beim Venustransit 2004 um 8.00 Uhr UT exakt gleichzeitig an weit voneinander entfernten Orten der Erde aufgenommen wurden.

1. von **Essen** ($\varphi = 51.24^\circ$, $\lambda = 7.00^\circ$), **Zeitdifferenz 150 s** (Abb. 8, S. 15),
2. Namibia, Internationale Amateursternwarte **IAS** ($\varphi = -21.22^\circ$, $\lambda = 14.86^\circ$), **Zeitdifferenz 120 s** (Abb. 9, S. 16)

Die Entfernung zur Sonne wird dadurch bestimmt, dass die parallaktische Verschiebung der Venus zwischen den beiden Aufnahmeorten gemessen wird.

Die Auswertungen können entweder **per Hand** oder mit kleinen für diesen Zweck entwickelten Programmen **am Computer** durchgeführt werden.

Als zusätzliche Aufgabe können die geübten Verfahren auf zwei professionelle Fotos (Abb. 12 und 13, S. 21f) der Sonnentelkope der Global Oscillating Network Group (**GONG**) angewendet werden (s. Anhang 1, S. 19):

4.1 Auswertung per Hand

Aufgabe 1 Bestimmen Sie Orientierung und Maßstab der Bilder:

- Bestimmen Sie auf den Bildern so genau wie möglich die Mittelpunkte, den Radius r_{Sonne} und die Länge Δ_S der Verschiebung zwischen den beiden Sonnenbildern. Sie können dazu die Schablone auf S. 17 verwenden, die dieser Anleitung evtl. als Folie beiliegt.

Lösung:

Die hier angegebenen Werte habe ich erst einmal – und vielleicht etwas zu flüchtig – gemessen.

Ort	r_{Sonne}	Δ_S
Essen	31.5mm	70.5mm
Namibia	53.0mm	91.5mm

- Der Maßstab der doppelt belichteten Bilder lässt sich aus der Ost-West-Verschiebung der Sonne ableiten, da der zeitliche Abstand der beiden Belichtungen bekannt ist (s. o.) – und damit die Ortveränderung der Sonne aufgrund der täglichen Drehung des Himmels:

Der von der Sonne in der Zeit Δt durch die Erddrehung am Himmel überstrichene Winkel Δ_S beträgt (s. Abbildung 6)

$$\Delta_S = \frac{360^\circ}{24h} \cos \delta_S \Delta t = \frac{15''}{1s} \cos \delta_S \Delta t.$$

Die Deklination der Sonne betrug am 8. Juni 2004 $\delta_S = 22^\circ 53'$.

Leiten Sie aus den auf den beiden Amateuraufnahmen gemessenen Werten für Δ_S den Maßstab der Bilder und den Winkelradius der Sonne ab.

Lösung:

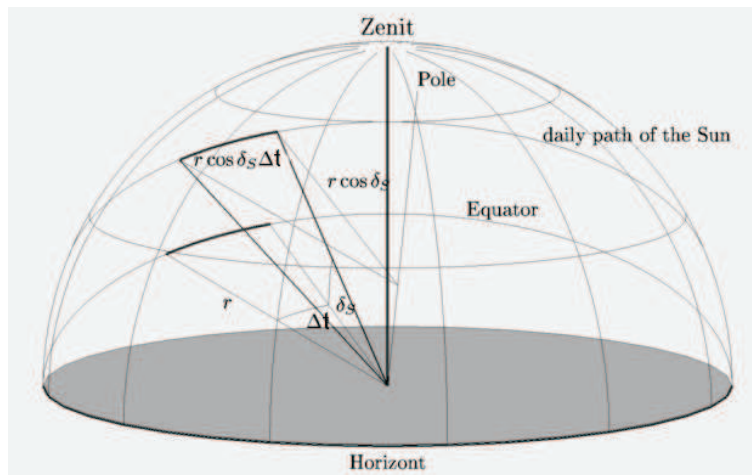


Abbildung 6: Zur Winkelgeschwindigkeit der Sonne aufgrund ihrer täglichen Bewegung am Himmel

	Δt	Δ_S	Maßstab	ρ_S	$\overline{\rho_S}$
Essen	150 s	2073''	29.4''/mm	15.4'	
Namibia	120 s	1658''	18.1''/mm	16.0'	15.7'

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die parallaktische Verschiebung $\Delta\beta$ des Venusscheibchens auf der Sonne. Leiten Sie dann mit Hilfe von (5) die parallaktische Verschiebung β_S der Sonne ab.

Zeichnen Sie dazu zunächst die Ost-West-Richtung (x-Achse) als Verbindung der beiden Sonnenmittelpunkte ein und richten Sie dieselbe Schablone an dieser Richtung aus.

- Messen Sie die rechtwinkligen Koordinaten (x_V, y_V) der Venusscheibchen relativ zum Mittelpunkt der exakt um 8.00 Uhr UT aufgenommenen (linken) Sonne zunächst absolut in mm. Berechnen Sie dann die relativen Koordinaten (x'_V, y'_V) , indem Sie durch den Sonnenradius dividieren.

Lösung:

	x_V	y_V	x'_V	y'_V
Essen	-8.0mm	-20.0mm	-0.2540	-0.6349
Namibia	-14.5mm	-33mm	-0.2736	-0.6226

- Mit den so bestimmten Koordinaten des Venusscheibchens können Sie nun die parallaktische Verschiebung von Venus berechnen – zunächst relativ zum Sonnenradius (Δ'_V), dann mit dem bereits bestimmten Winkelradius der Sonne absolut in Bogensekunden ($\Delta\beta$). Sie können die Positionen in das Millimeterpapier S. 18 einzeichnen und dort ihren Abstand messen.

Lösung:

	Δ'_V	$\Delta\beta$
Essen – Namibia	0.02314	21.8''

- Berechnen Sie aus der parallaktischen Verschiebung $\Delta\beta$ der Venus mit Hilfe von (5) den Parallaxenwinkel β_S der Sonne, d. h. den Winkelabstand, den die beiden Beobachtungsorte von der Sonne aus haben. (Am 8. Juni 2004 betrug der Abstand der Erde von der Sonne $r_E = 1.015AE$, der Abstand der Venus von der Erde $r_E - r_V = 0.289AE$.)

Lösung:

<i>Essen - Namibia</i>	β_S
	$8.68''$

Aufgabe 3 Leiten Sie aus der Parallaxenwinkel β_S der Sonne Näherungswerte für die Sonnenparallaxe π_S ab, d. h. für den Winkel, unter dem der Erdradius von der Sonne aus gesehen werden würde.

1. Nehmen Sie zunächst an, dass die Beobachtungsorte (von der Sonne aus gesehen) maximal möglichen Abstand auf der Erde haben.

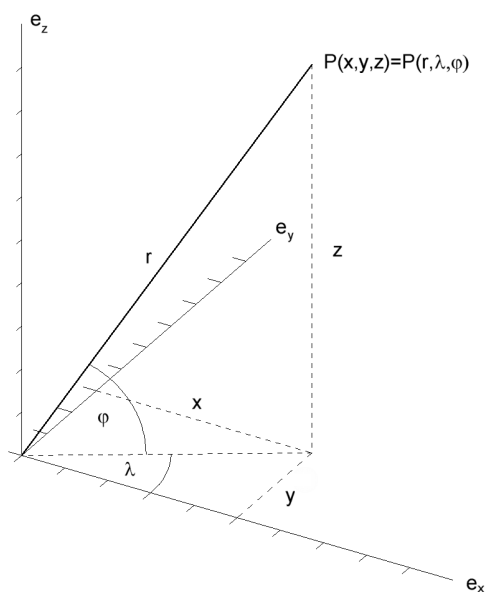
Lösung:

Der Abstand beträgt dann $2R_E$, die Sonnenparallaxe ist also halb so groß wie β_S , also

$$\pi_S \approx 4.34''$$

2. Gehen Sie dann davon aus, der Verbindungsvektor der beiden Beobachtungsorte stehe senkrecht auf der Verbindungslinie Erde - Sonne ($\Delta_{\perp} = \Delta$ in Abb. 5 bzw. $w = 90^\circ$ in (6)).

Bestimmen Sie dazu den linearen Abstand Δ der Beobachtungsorte aus ihren geografischen Koordinaten, indem Sie zunächst ihre rechtwinkligen Koordinaten ($x = \cos\varphi \cos\lambda$, $y = \cos\varphi \sin\lambda$, $z = \sin\varphi$, s. die folgende Abbildung) berechnen.



Zur Umrechnung von sphärischen in rechtwinklige Koordinaten

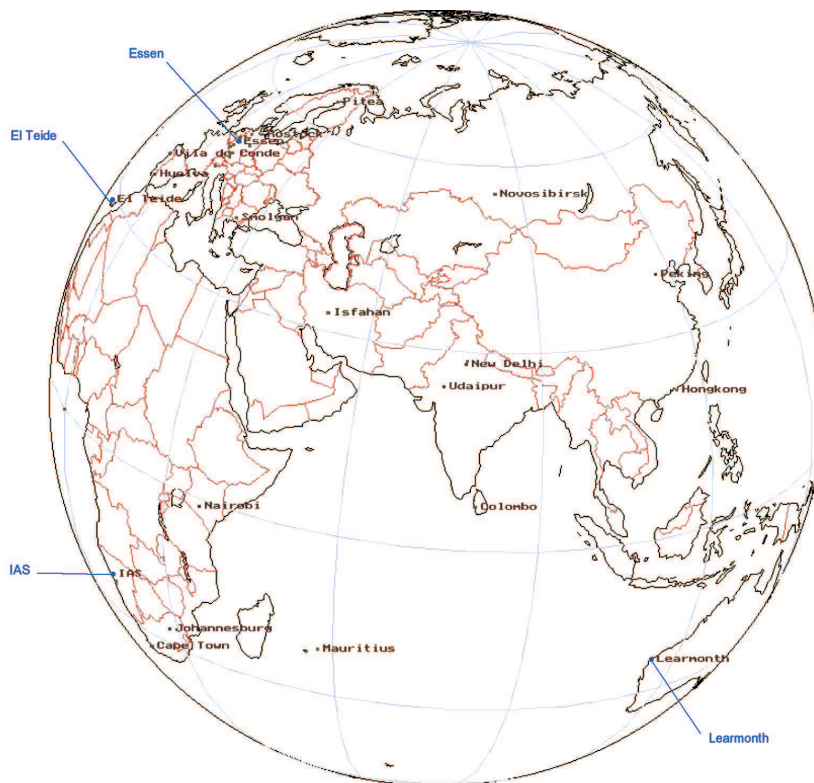


Abbildung 7: Die Tagseite der Erde am 8. Juni 2004 um 8.00 Uhr UT

Lösung:

	$x' = \cos \varphi \cos \lambda$	$y' = \cos \varphi \sin \lambda$	$z' = \sin \varphi$	Δ
Essen	0.6214	0.0763	0.7798	1.19R _E
Namibia	0.9010	0.2391	-0.3691	

Wenn der Verbindungsvektor der beiden Städte senkrecht auf der Verbindungslinie Erde - Sonne steht, gilt nach (6)

$$\pi_S \stackrel{w=90^\circ}{=} \frac{R_E}{\Delta} \beta_S = 7.29'' \text{ (Essen - Namibia)}$$

3. Berücksichtigen Sie schließlich den Projektionswinkel w , indem Sie den projizierten Abstand Δ_\perp zwischen Essen und Namibia der Abbildung 7 entnehmen².

Lösung:

	Δ_\perp	Δ_\perp/R_E	π_S
Essen - IAS	49mm	1.15	7.54''
Erddurchmesser	85mm		

²Der Projektionswinkel kann auch berechnet werden. Da diese Berechnung jedoch nicht einfach ist, wird sie nur im Anhang 2 S. 23 behandelt.

Aufgabe 4 Wie groß ist die Entfernung zur Sonne, die sich daraus ergibt ($R_E = 6378 \text{ km}$)³?

Lösung:

$$\pi_S = \frac{R_E}{1AE} \implies 1AE = \frac{R_E}{\pi_S} \implies$$

Essen - Namibia: 1 AE = 27337 R_E = 174.4 Millionen km

4.2 Auswertung per Computer

Aufgabe 1 Messen Sie mit dem Programm `evaltransitpics` die Positionen von Venus auf den Bildern aus Essen und Namibia aus.

Das Programm erwartet die folgenden Eingaben:

- den Namen der Textdatei, in der die Messergebnisse gespeichert werden sollen („Essen.txt“ bzw. „Namibia.txt“)
- den Namen der Bilddatei („Essen0800.jpg“ bzw. „Namibia0800.jpg“)
- den Faktor der Größenreduktion („2“; für eine sehr genaue Messung ist „1“ besser. Das Bild kann auf dem Bildschirm geeignet verschoben werden.)
- die Uhrzeit der Aufnahme („8.00“)
- die Deklination der Sonne zum Zeitpunkt der Aufnahme („22.7“)
- die Anzahl der Sonnenbilder auf dem Foto (2)
- die Zeitdifferenz zwischen den beiden Aufnahmen (150s bzw. 120s)
- die Pixelkoordinaten der oberen linken Ecke des Bildes auf dem Bildschirm
- den anfänglichen Radius des Anpassungskreises

Nach diesen Eingaben wird das Bild dargestellt, und man kann nacheinander vier Kreise an die beiden Sonnen- und die beiden Venusbilder anpassen. Ausführliche Bedienungshinweise erhält man mit Taste „F1“.

Lösung:

Essen0800.jpg

Pixel position of Sun 1: x:444, y:1104, r:424

Pixel position of Sun 2: x:1146, y:466, r:424

Pixel position of Venus 1: x:544, y:1374, r:15

Pixel position of Venus 2: x:1250, y:732, r:13

angle of displacement:

relative Position of Venus 1:

³Der sich hier ergebende Wert ist die *aktuelle* Sonnenparallaxe. Um *die* (mittlere) Sonnenparallaxe zu erhalten, muss mit der aktuellen Sonnenentfernung korrigiert werden. *Damit ergibt sich* $1AE = 26933R_E = 171.8 \text{ Millionen km}$.

```

=====
                rho1': 0.6791
    position angle 1:-111.94
                x1':-0.2537
                y1':-0.6299

relative Position of Venus 2:
=====
                rho2': 0.673604
    position angle 2:-110.911186
                x2':-0.2404
                y2':-0.6292

    angular radius of the Sun: 15.5'

```

Namibia0800.jpg

```

    Pixel position of Sun 1: x:533, y:604, r:507
    Pixel position of Sun 2: x:1415, y:547, r:507
    Pixel position of Venus 1: x:416, y:920, r: 17
    Pixel position of Venus 2: x:1304, y:865, r: 17
    angle of displacement: 3.7

```

```

relative Position of Venus 1:
=====
                rho1': 0.6646
    position angle 1:-114.01
                x1':-0.2705
                y1':-0.6071

relative Position of Venus 2:
=====
                rho2': 0.664331
    position angle 2:-112.939525
                x2':-0.2589
                y2':-0.6118

    angular radius of the Sun: 19.8'

```

Aufgabe 2 Für die Berechnung der Sonnenentfernung verwenden Sie die Excel-Tabelle comp2Venuspositions.xls.

Tragen Sie dort die geografischen Positionen der Beobachtungsorte und die eben bestimmten relativen Koordinaten (x'_V, y'_V) der Venus ein. Wenn Sie dann als Nummern der zu vergleichenden Venuspositionen 1 und 2 eintragen (mehr Werte enthält die Tabelle z. Z. nicht.), dann werden Ihnen darunter die Sonnenparallaxe und die Entfernung zur Sonne angezeigt.

Lösung:

no.	location	lat	long	UT	x'	y'	No. 1	No.2
1	Essen, Germany	51.240	7.000	8:00:00	-0.2537	-0.6299	1	2
2	Namibia	-21.220	14.860	8:00:00	-0.2673	-0.6063		
3								
4							piS in "	8.87
5							1AE in RE	23246
6							1AE in km	148267690

Der Algorithmus, mit dem die Ergebnisse berechnet werden, entspricht genau der hier dargestellten Vorgehensweise. Sie können ihn aus dem Tabellenblatt `calculation` herauslesen.

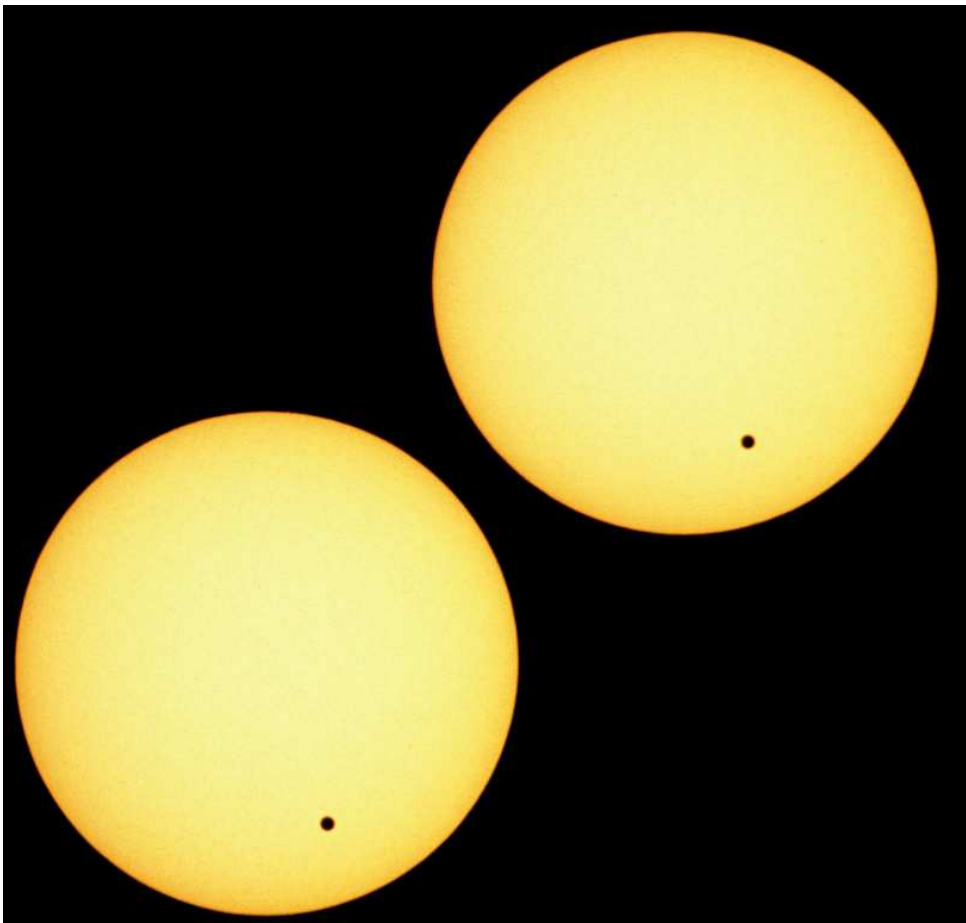


Abbildung 8: Essen, 8.00 UT, $\Delta t = 150s$

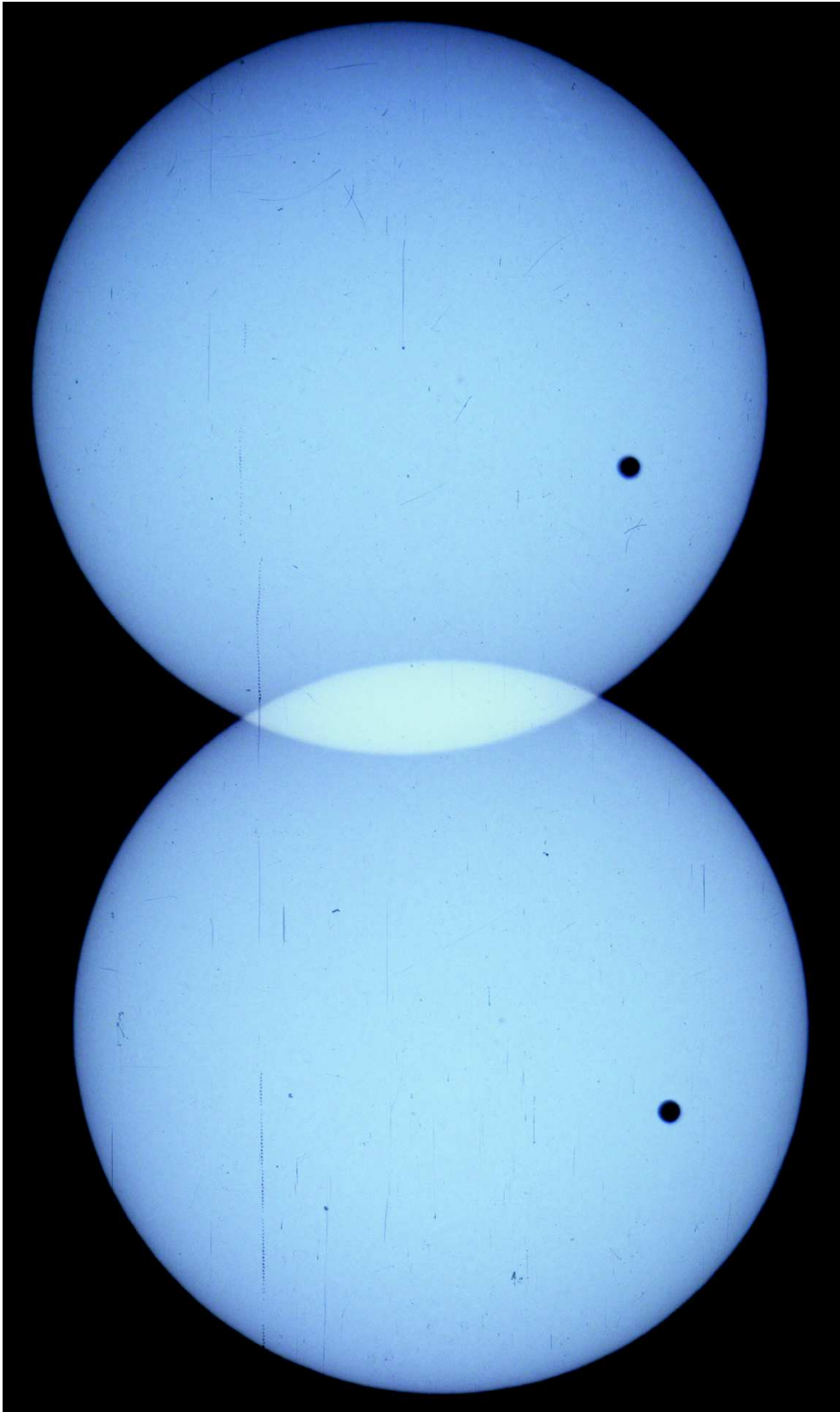


Abbildung 9: Namibia, IAS, 8.00 UT, $\Delta t = 120s$

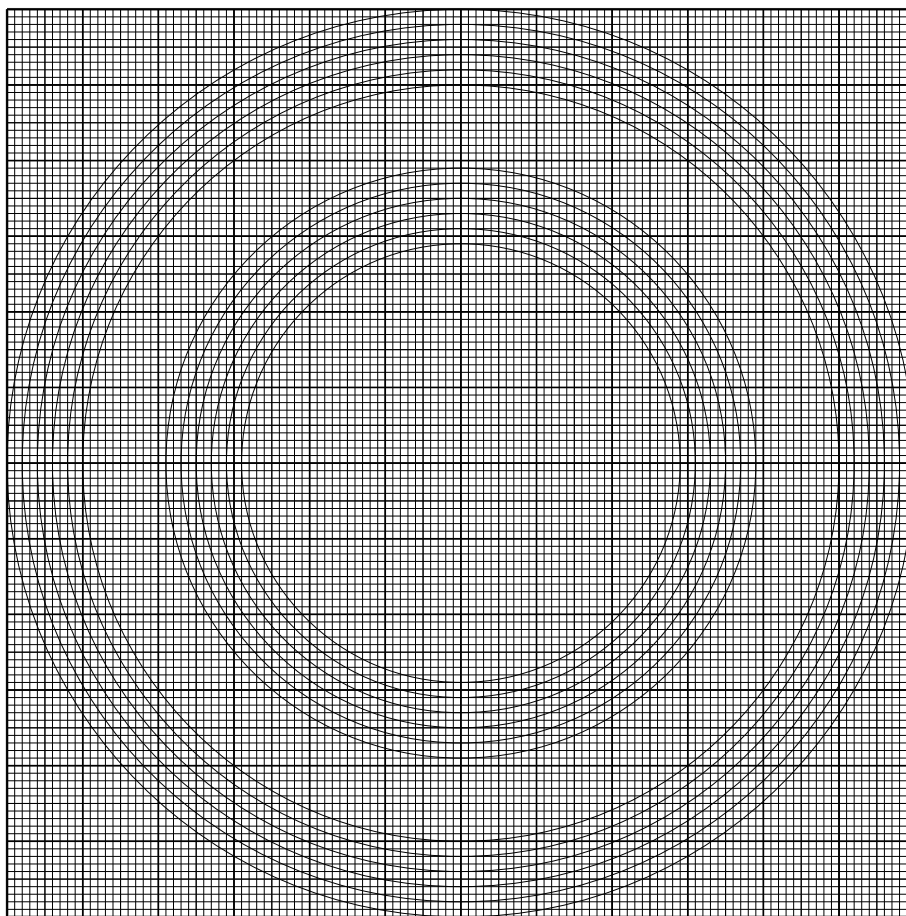


Abbildung 10: Schablone zum einfachen Auffinden der Mittelpunkte der Sonnenbilder

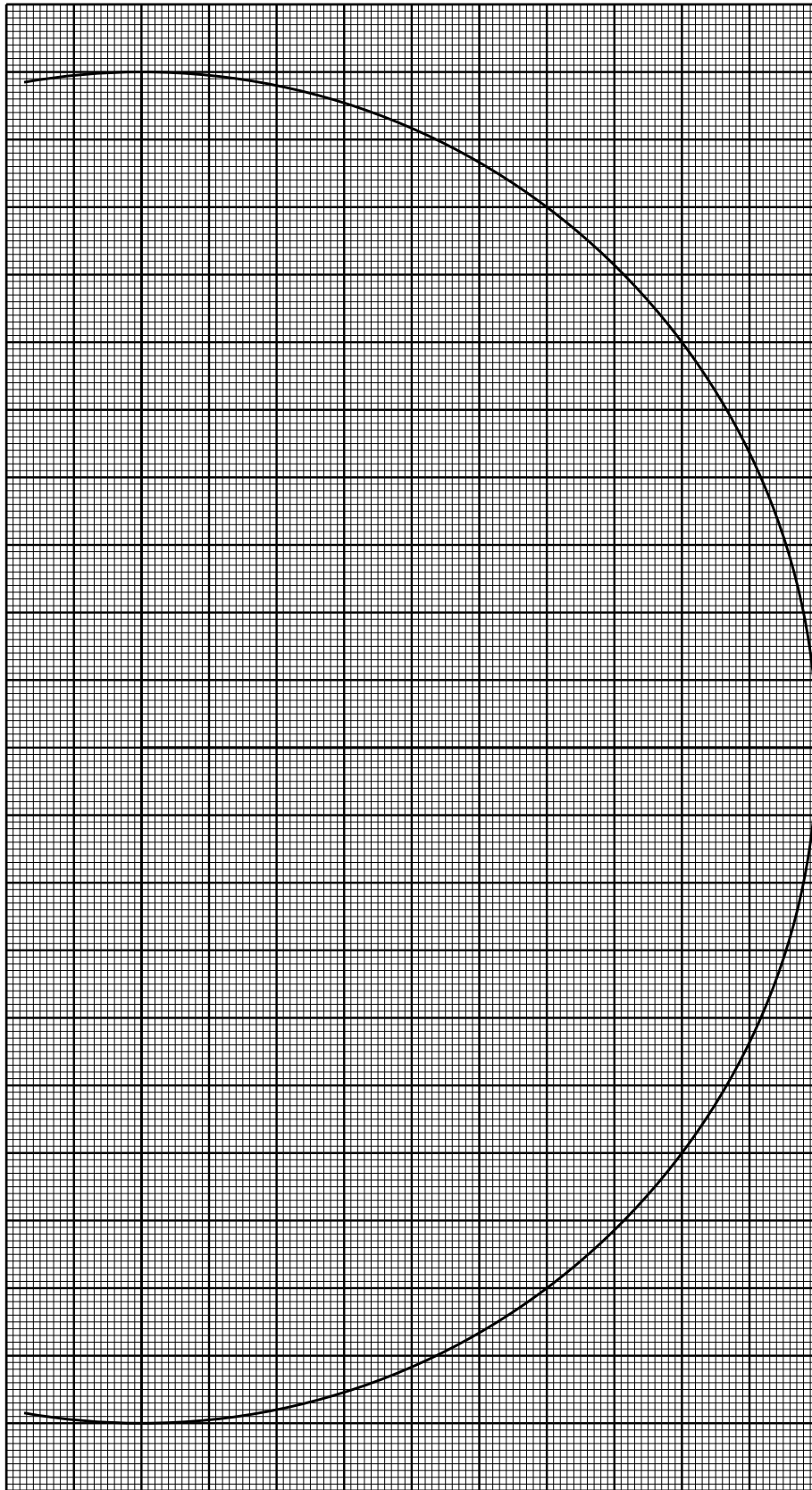


Abbildung 11: Zum einfachen Eintragen der gemessenen Venuspositionen und zum Messen ihres Abstandes

5 Anhang

5.1 Auswertung der GONG-Bilder

Die beiden Bilder wurden in Australien und auf den Kanarischen Inseln aufgenommen:

1. **Learmonth**, Australien ($\varphi = -22.2^\circ$, $\lambda = 114.1^\circ$),
2. **El Teide**, Teneriffa ($\varphi = 28.3^\circ$, $\lambda = -16.5^\circ$)

Die Auswertung erfolgt in denselben Schritten wie bei den Amateurbildern – mit der einzigen Ausnahme, dass die Orientierung der Einzelbilder bekannt ist.

5.1.1 Auswertung per Hand

Aufgabe 1 Übernehmen Sie den anhand der Amateurbilder bestimmten Winkelradius ρ_S der Sonne ($15.65'$) und berechnen Sie damit den Winkelmaßstab der GONG-Bilder.

Lösung:

$$\text{Maßstab} = \frac{15.65'}{390 Px} = 2.408''/Px$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie auf entsprechende Weise wie im Hauptteil die Positionen der Venus, ihre parallaktische Verschiebung $\Delta\beta$ und den Parallaxenwinkel β_S der Sonne.

- Für die Positionen der Venus auf den beiden Bildern ergibt sich:

Lösung:

	x_V	y_V	x'_V	y'_V
<i>Learmonth</i>	399	682	-0.079487	-0.643590
<i>El Teide</i>	386	693	-0.112821	-0.671795

- Daraus ergibt sich die parallaktische Verschiebung der Venus relativ zur Sonne:

Lösung:

	Δ'_V	$\Delta\beta$
<i>Learmonth – El Teide</i>	0.04367	41.0''

- Mit den bekannten Abständen von Venus und Erde von der Sonne ergibt sich daraus der folgende Parallaxenwinkel β_S der Sonne:

Lösung:

	β_S
<i>Learmonth – El Teide</i>	16.31''

Aufgabe 3 Bestimmen Sie Näherungswerte für die Sonnenparallaxe π_S :

- Die rechtwinkligen Koordinaten von Learmonth und El Teide und ihr linearer Abstand Δ sind:

Lösung:

	$x' = \cos \varphi \cos \lambda$	$y' = \cos \varphi \sin \lambda$	$z' = \sin \varphi$	Δ
Learmonth	-0.3781	0.8452	-0.3778	$1.85R_E$
El Teide	0.8442	-0.2501	0.4741	

Aus der Annahme $w = 90^\circ$ folgt daraus:

Lösung:

Wenn der Verbindungsvektor der beiden Städte senkrecht auf der Verbindungslinie Erde - Sonne steht, gilt nach (6)

$$\pi_S \stackrel{w=90^\circ}{=} \frac{R_E}{\Delta} \beta_S = 8.82'' \text{ (Learmonth - El Teide)}$$

- Messen Sie in Abbildung 7 den projizierten Abstand der beiden Orte und berechnen Sie den sich daraus ergebenden Wert der Sonnenparallaxe⁴.

Lösung:

	Δ_\perp	Δ_\perp/R_E	π_S
Learmonth - El Teide	78mm	1.84	8.91''
Erddurchmesser	85mm		

Aufgabe 4 Welche Werte ergeben sich damit für die Entfernung zur Sonne?

Lösung:

$$\text{Learmonth - El Teide: } 1 \text{ AE} = 23393 R_E = 149.2 \text{ Millionen km}$$

5.1.2 Auswertung per Computer

Aufgabe 1 Da die GONG-Bilder nur ein Sonnenbild enthalten, muss ihre Orientierung bekannt sein: Auf den Bildern zeigt die Rotationsachse der Sonne exakt nach oben ($\alpha = 12.05^\circ$). Damit können die Bilder ebenso wie die Amateurbilder ausgemessen werden.

Lösung:

```
Learmonth
Sun: x:430, y:430, r:389
Venus: x:398, y:682, r: 16
rho': 0.653017
position angle:-109.287
x':-0.215691
y':-0.616367
```

⁴Aus der astronomischen Berechnung in Anhang 2 ergeben sich fast identische Werte.

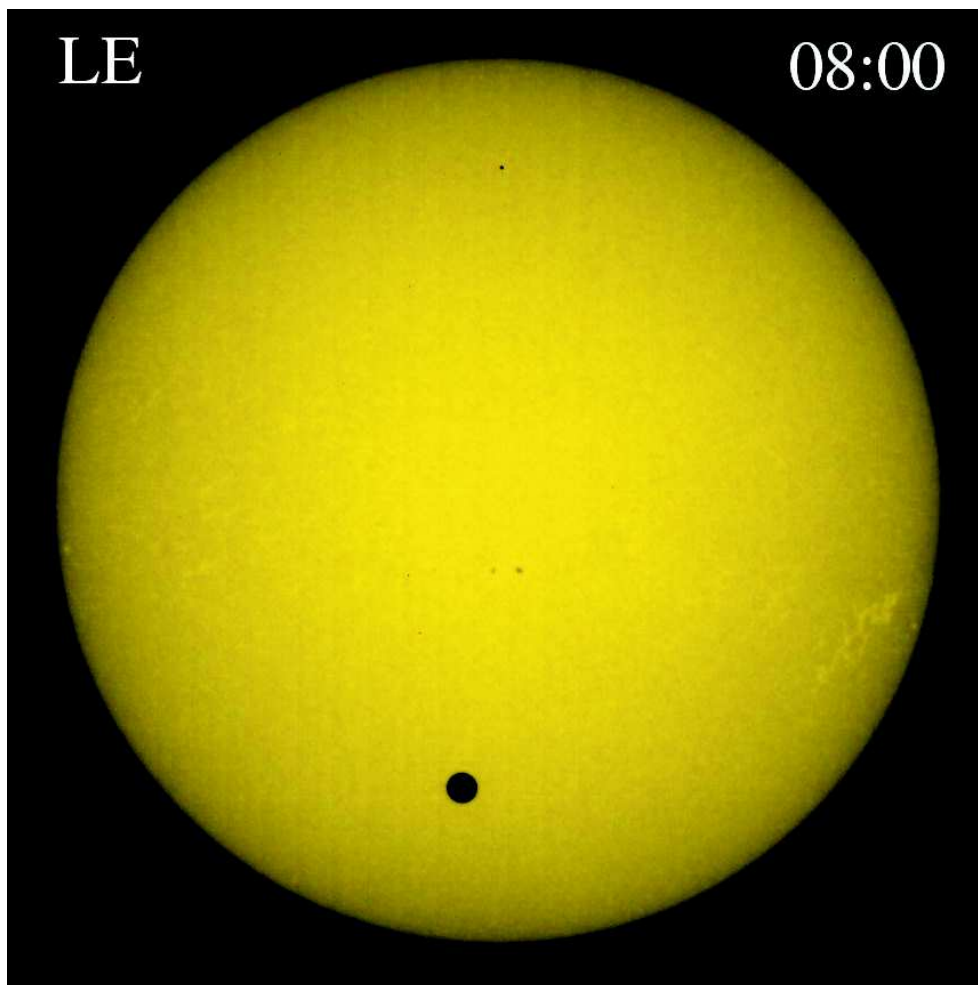


Abbildung 12: GONG, Learmonth, 8.00 UT

El Teide

```

Sun: x:430, y:431, r:389
Venus: x:386, y:693, r: 16
rho': 0.682954
position angle:-111.583
x':-0.251226
y':-0.635068

```

Aufgabe 2 Die obigen Ergebnisse können zusätzlich in die Tabelle `comp2Venuspositions.xls` übertragen werden. Dann können nicht nur die GONG-Bilder miteinander verglichen werden, sondern auch die Amateurbilder mit den professionellen Bildern.

Lösung:

no.	location	lat	long	UT	x'	y'	No. 1	No.2
3	Learmonth	-22.200	114.100	8:00:00	-0.2157	-0.6164	3	4
4	El Teide	28.300	-16.500	8:00:00	-0.2512	-0.6351	piS	8.30
5							1AE in RE	24846
6							1AE in km	158471878

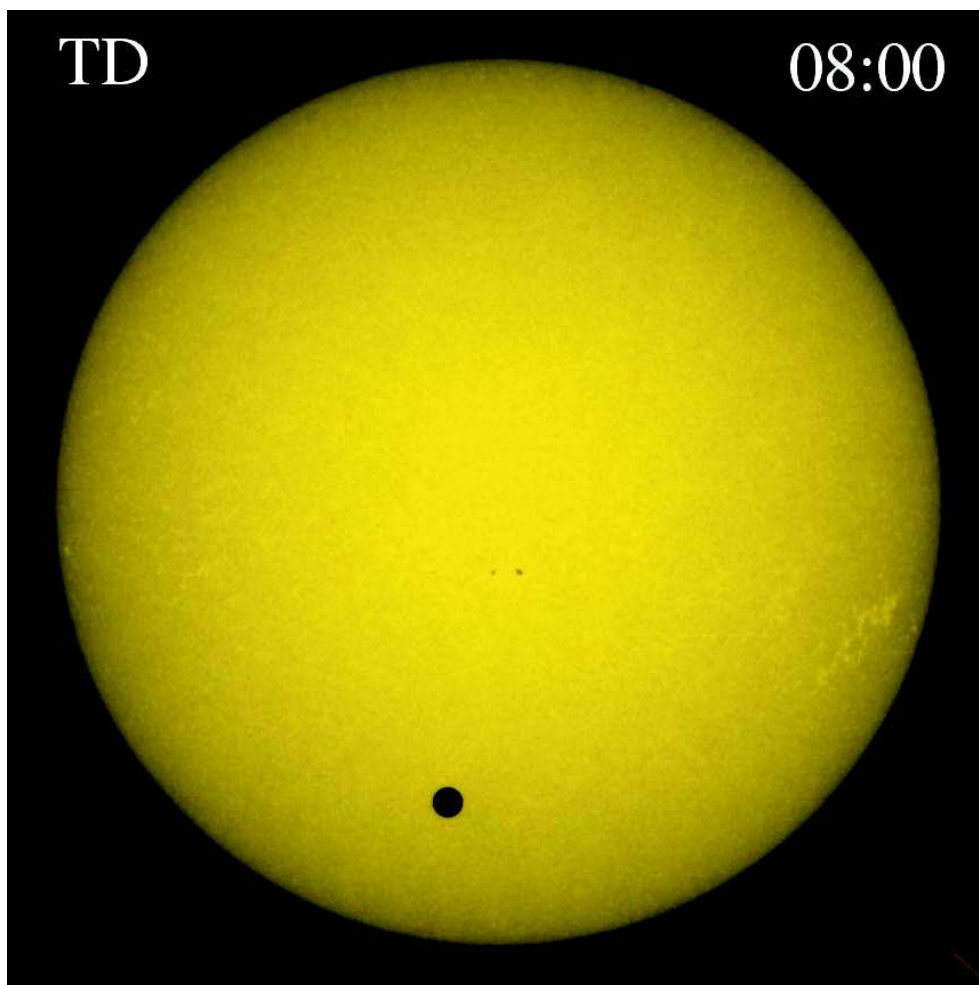


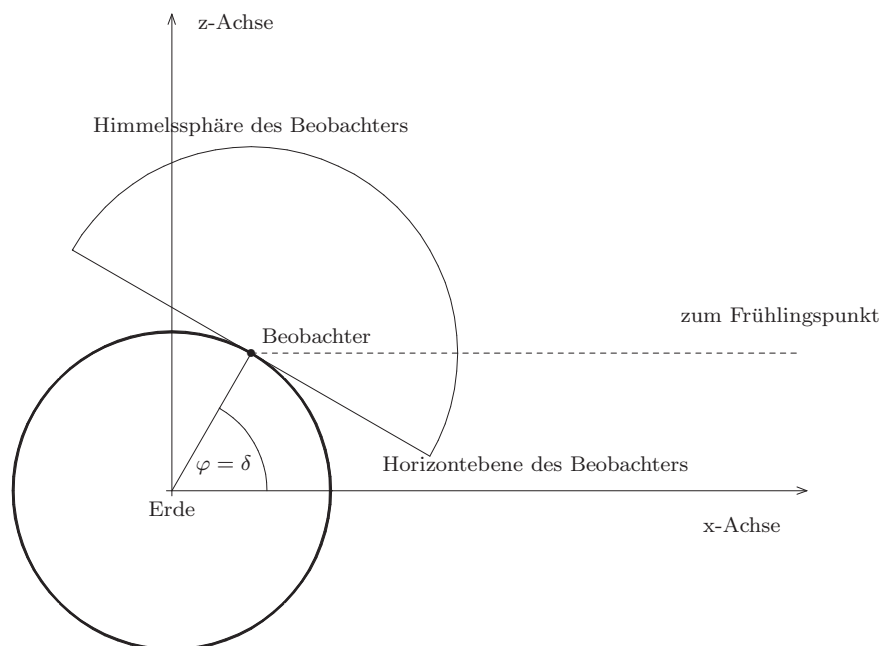
Abbildung 13: GONG, El Teide, 8.00 UT

5.2 Berechnung des Projektionswinkels w

Um 8.00 UT standen die Verbindungsvektoren der Beobachtungsorte nahezu senkrecht auf dem Richtungsvektor zur Sonne. Die Berücksichtigung des Projektionswinkels w verändert das Ergebnis deshalb nur sehr wenig. *Die folgende, etwas komplizierte, Rechnung, die zusätzliche astronomische Kenntnisse voraussetzt, bringt also eine nur kleine Korrektur.*

Um den Winkel w in (6) bestimmen zu können, braucht man die Koordinaten der Sonne und der beiden Orte *in demselben Koordinatensystem*. Dazu bietet sich das geozentrische Äquatorialsystem an.

- Bestimmen Sie die äquatorialen Koordinaten (α, δ) der Beobachtungsorte.
Tipp: Die Deklination der beiden Beobachtungsorte stimmt mit ihrer geografischen Breite überein, ihre Rektaszension ist gleich ihrer Sternzeit.



Koordinaten der Beobachtungsorte: Wenn die lokale Sternzeit 0h ist, der Frühlingspunkt also gerade kulminiert, ist die Rektaszension des Beobachtungsortes auch 0h.

- Am 8.6.2004 betrug um 0.00h UT die Sternzeit in Greenwich

$$\Theta_{0Gr} = 17h06min52s.$$

Berechnen Sie aus dieser Angabe zunächst die Sternzeit in Greenwich um 8.00 Uhr UT. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Sternzeit um den Faktor 1.0027379 schneller geht als die mittlere Sonnenzeit.

Lösung:

$$\Theta_{Gr} = \Theta_{0Gr} + 8.00 * 1.0027379 = 1h08min11s.$$

- Wieviel Uhr Sternzeit ist es demnach an den Beobachtungsorten?

Lösung:

Die Sternzeit an einem beliebigen Ort der geografischen Länge λ beträgt zu derselben Zeit

$$\Theta = \Theta_{Gr} + \frac{4min}{1^\circ} \lambda$$

Damit ergeben sich die folgenden lokalen Sternzeiten:

	Θ
Essen	1h36m11s
Namibia	2h07m37s
Learmonth	8h44m35s
El Teide	0h02m11s

- Berechnen Sie nun die äquatorialen Koordinaten der beiden Orte!

Lösung:

	α	δ	x	y	z
Essen	1h36m11s = 24.0°	51.24°	0.572	0.255	0.780
Namibia	2h07m37s = 31.9°	-21.22°	0.791	0.493	-0.362
Learmonth	8h44m35s = 131.1°	-22.2°	-0.609	0.698	-0.379
El Teide	0h02m11s = 0.5°	28.3°	0.880	0.008	0.474

- Die Sonne hatte am 8. Juni 2005 um 8.00 Uhr UT die Position

$$\alpha_S = 5h06min39s \hat{=} 76.66^\circ, \delta_S = 22^\circ 52.2' = 22.87^\circ.$$

Rechnen Sie diese Position in rechtwinklige Koordinaten um und berechnen Sie aus Ihren Ergebnissen den Projektionswinkel w und daraus den projizierten Abstand Δ_\perp . Korrigieren Sie entsprechend das Ergebnis für die Sonnenparallaxe!

Lösung:

Rechnet man die Positionen in rechtwinklige Koordinaten um und berechnet die Verbindungsvektoren der Beobachtungsorte, dann erhält man den gesuchten Winkel w , indem man das Skalarprodukt des entsprechenden Einheitsvektors \vec{e}_{12} mit dem (Einheits-) Richtungsvektor \vec{e}_S zur Sonne bildet. Auf diese Weise erhält man

	x	y	z	w	Δ_\perp
Essen - Namibia	0.184	0.201	-0.962	81.1°	1.17 R_E
Learmonth - El Teide	0.805	-0.373	0.461	88.6°	1.85 R_E
Sonne	0.213	0.897	0.389		

Daraus folgt schließlich das Endergebnis:

$$\begin{aligned} \text{Essen - Namibia:} & \quad \pi_S = 8.70'' \\ \text{Learmonth - El Teide:} & \quad \pi_S = 8.82'' \end{aligned}$$

- Diese Auswertung (und die folgende Verfeinerung) können Sie auch mit der Excel-Tabelle `comp2Venuspositions.xls` am Computer vornehmen! Wenn Sie mögen können Sie dort nachvollziehen, wie obige Rechnung durchgeführt wird.