Doppler-Effekt und Bahngeschwindigkeit der Erde

(mit Lösungen)

1 Einleitung

Nimmt man im Laufe eines Jahres mehrere hochauflösende Spektren des Lichtes eines Sternes auf, dann beobachtet man, dass die Wellenlänge der Absorptionslinien im Rhythmus des Jahres etwas schwankt – und zwar umso mehr, je näher der Stern an der Ekliptikebene liegt (siehe z.B. [4], S. 23). Die Ursache für diese Wellenlängenänderung ist der Umlauf der Erde um die Sonne: Bewegt sich die Erde auf den Stern zu, dann verkürzen sich alle Wellenlängen; umgekehrt werden die Linien zum roten Teil des Spektrums verschoben, wenn sich die Erde von dem Stern entfernt.

Diese sogenannte *Doppler-Verschiebung* der Sternspektren ist (wie die Lichtaberration und die Fixsternparallaxe) ein empfindlicher physikalischer Nachweis für die Bewegung der Erde um die Sonne. Sie ermöglicht eine präzise Bestimmung der Größe der Erdbahn und damit der Astronomischen Einheit.

In dieser Aufgabe soll die Doppler-Verschiebung in zwei Spektren des Sternes Arktur dazu benutzt werden, die Bahngeschwindigkeit der Erde zu bestimmen und daraus die Entfernung zwischen Erde und Sonne abzuleiten (siehe auch [2]).

2 Etwas Theorie

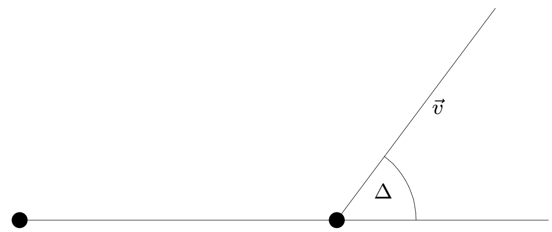
2.1 Der Doppler-Effekt

Eine Lichtquelle Q emittiere monochromatisches Licht der Wellenlänge λ_L, das von einem Empfänger E registriert werde. Ruhen Quelle und Empfänger relativ zueinander, dann stimmt die Wellenlänge λ des empfangenen Lichtes mit λ_L überein. Ändert sich jedoch die Entfernung zwischen Q und E mit der Geschwindigkeit v, dann tritt eine Verschiebung der Wellenlänge des empfangenen Lichtes auf. Wenn v sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist, dann gilt:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_L} = \frac{\lambda - \lambda_L}{\lambda_L} = \frac{v}{c}, \quad \text{Verringerung der Entfernung: } v < 0 \tag{1}$$

Bei Annäherung tritt also eine Violettverschiebung, bei Vergrößerung des Abstandes eine Rotverschiebung auf, die proportional zur Relativgeschwindigkeit ist.

Bewegen sich Q und E nicht entlang der gemeinsamen Verbindungslinie, muss der Winkel δ zwischen Verbindungslinie und Bewegungsrichtung



berücksichtigt werden:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_L} = \frac{|\vec{v}|}{c} \cos\delta. \tag{2}$$

Werden die Richtungen von Verbindungslinie und Relativbewegung in ekliptikalen Koordinaten (λ, β)[1] angegeben, dann lässt sich der eingeschlossene Winkel δ mit Hilfe des Seitencosinussatzes der sphärischen Trigonometrie (siehe z.B. [1], S. 205f) berechnen:

$$\cos\delta = \sin\beta_1 \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{3}$$

2.2 Die Bewegung der Erde um die Sonne

Geozentrisch äußert sich der Umlauf der Erde um die Sonne in einem Umlauf der Sonne auf der Ekliptik. Dabei ändert sich ihre (gegen die Richtung zum Frühlingspunkt gemessene) **geozentrisch ekliptikale Länge $\boldsymbol{\lambda_S}$** von 0° am Frühlingsanfang über 90° (Sommeranfang) und 180° (Herbstanfang) nach 270° (Winteranfang).

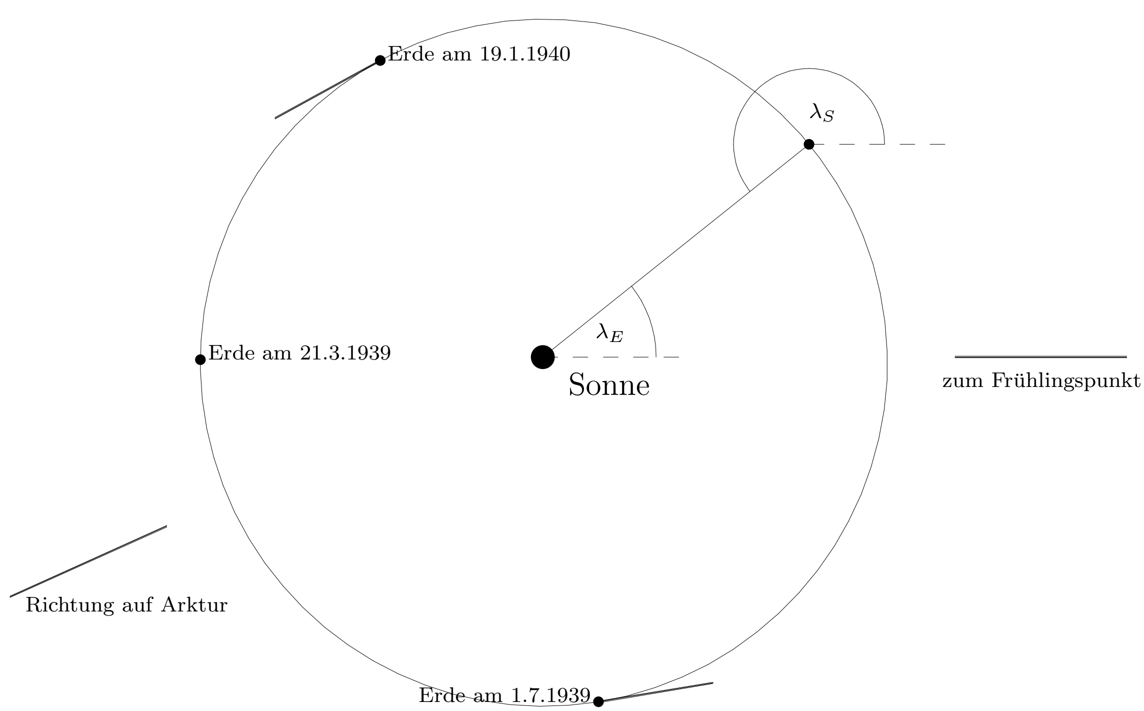


Abbildung 1: Die Bewegung der Erde in der Ekliptikebene

[1]Die ekliptikale Länge λ wird in der Ebene der Ekliptik relativ zur Richtung des Frühlingspunktes gemessen. Die ekliptikale Breite β ist der Höhenwinkel über dieser Ebene.

Entsprechend ändert sich die **heliozentrisch ekliptikale Länge $\boldsymbol{\lambda_E}$** der Erde im Laufe des Jahres (Abb. 1).

Die Erdbahn ist eine Ellipse, die allerdings nahezu perfekt mit einem Kreis übereinstimmt ($\frac{a-b}{a} \approx 1.5 \cdot 10^{-4}$). Etwas auffälliger ist, dass sich die Sonne nicht genau im Mittelpunkt der Erdbahn befindet: $d(M, S) = \varepsilon a = 0.017a$. Dabei ist ε die sogenannte *numerische Exzentrizität* der Erdbahn. Du kannst versuchen, diese Aussagen an der maßstabsgetreuen Abb. 1 nachzumessen!

Die Erde ist der Sonne Anfang Januar am nächsten. Nach dem Flächensatz (2. Keplersches Gesetz) ist dann ihre Geschwindigkeit um den Faktor

$$\frac{v_{Januar}}{v_{Juli}} = \frac{d(S,E)_{Juli}}{d(S,E)_{Januar}} = \frac{(1+\varepsilon)a}{(1-\varepsilon)a} = 1.035$$

größer als im Juli.

3 benötigte Hilfsmittel

- wissenschaftlicher Taschenrechner
- 30cm-Lineal mit Maßstab

Literatur

[1] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner: Stuttgart, Leipzig 1991

[2] D. Hoff: *Laboratory Exercises in Astronomy – The Earth's Orbital Velocity*, Sky & Telescope 43/1, 9 (1972)

[3] O. Struve, *Astronomie*, de Gruyter: Berlin 1967

[4] A. Unsöld, B. Baschek, *Der neue Kosmos*, Springer: Berlin usw. 1991

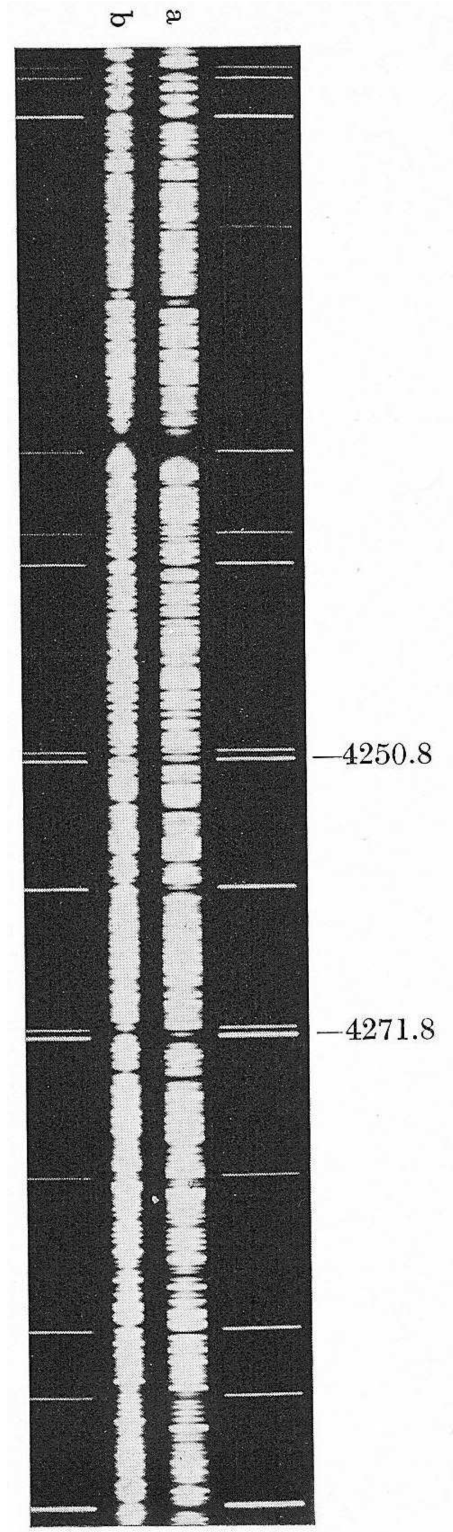


Abbildung 2: Spektren des Arktur, eines Sternes konstanter Geschwindigkeit, aufgenommen mit 6 Monaten Zwischenzeit: a) 1.7.1939, b) 19.1.1940 (aus [3], S. 86)

4 Aufgaben (mit Lösungen)

Die Bestimmung der Bahngeschwindigkeit der Erde soll anhand zweier Spektren des Sternes **Arktur** (Abb. 2, aus [3], S. 86) nachvollzogen werden, die am **1.7.1939 (a)** und am **19.1.1940 (b)** auf dem Mt. Wilson aufgenommen wurden. Die Abbildung zeigt zum Vergleich die Emissionslinien eines Eisenbogens unmittelbar vor dem Spektrographen. Dieselben Linien enthält das Arkturspektrum in Absorption, jedoch deutlich verschoben.

Wegen der winzigen Abweichung der Erdbahn von der Kreisform und der geringen Schwankung der Bahngeschwindigkeit soll im folgenden angenommen werden, *die Erde bewege sich gleichförmig auf einem Kreis, in dessen Mittelpunkt sich die Sonne befindet.*

1. Am **21. März 1939** sei die geozentrisch ekliptikale Länge der Sonne $\lambda_\mathbf{S} = \mathbf{0}°$.

   (a) Wie groß ist dann die **heliozentrisch ekliptikale Länge $\boldsymbol{\lambda_E}$** der Erde am 1.7. und am 19.1.? Berechne dazu zunächst die mittlere tägliche Bewegung μ_E der Erde (in $°/d$)!

   $$\mu_E = \frac{360°}{365.25d} = 0.9856°/d$$

   $$\Delta t_a = 11{+}30{+}31{+}30 = 102d,\ \Delta t_b = \Delta t_a{+}31{+}31{+}30{+}31{+}30{+}31{+}18 = 304d$$

   $$\lambda_{E_i} = 180° + \mu_E \Delta t_i \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{E_a} = 280.5°,\ \lambda_{E_b} = 119.6°$$

   (b) Wie groß ist demzufolge die **heliozentrisch ekliptikale Länge $\boldsymbol{\lambda_v}$** der Bewegungsrichtung der Erde an den beiden Tagen?

   $$\lambda_{v_i} = \lambda_{E_i} + 90° \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{v_a} = 10.5°,\ \lambda_{v_b} = 209.6°$$

2. Bestimme mit Hilfe der Spektren in Abb. 2 die **gesamte Wellenlängenänderung $\boldsymbol{\Delta\lambda}$** zwischen dem 1.7. und dem 19.1. im Verhältnis zur Laborwellenlänge λ_L. Geeignet erscheinen dafür besonders die Linien $\lambda_L = 4222.2$Å und $\lambda_L = 4250.1$Å. Bestimme dazu zunächst den Maßstab des Spektrums (in Å$/cm$). Bei der Abstandsbestimmung versuche, Zehntelmillimeter abzuschätzen!

   $$20.55cm \mathrel{\hat{=}} 72.0\text{Å} \quad \Longrightarrow \quad 0.20cm \mathrel{\hat{=}} 0.7\text{Å}$$

   $$\Longrightarrow \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_L} = \frac{0.7}{4222.2} = 1.658 \cdot 10^{-4}$$

3. Die **ekliptikale Länge von Arktur** beträgt $\boldsymbol{\lambda_\mathbf{A} = 204.2°}$. Nimm zunächst vereinfachend an, die Erde bewege sich am 1.7. und am 19.1. genau in Richtung der Verbindungslinie Sonne – Arktur.

   (a) Welche Bahngeschwindigkeit der Erde ergibt sich aus dieser Annahme?

   $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_L} = \frac{\lambda_a - \lambda_L}{\lambda_L} - \frac{\lambda_b - \lambda_L}{\lambda_L} = 2\frac{v_E}{c} \quad \Longrightarrow \quad v_E = \frac{c}{2}\frac{\Delta\lambda}{\lambda_L} = 24.9\frac{km}{s}$$

(b) Wie groß ist demzufolge der Radius der Erdbahn, die Astronomische Einheit also?

$$v_E = \frac{2\pi R_E}{365.25d} \quad \Longrightarrow \quad 1AE = R_E = \frac{v_E}{2\pi} \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 3600s = 125000000km$$

4. Tatsächlich bewegt sich die Erde an den beiden Tagen nicht direkt in Richtung der Verbindungslinie, insbesondere weil Arktur nicht in der Ekliptikebene liegt ($\boldsymbol{\beta_A} = \mathbf{30.7°}$).

   (a) Berechne deshalb die Winkel δ_i zwischen der Bewegungsrichtung und der Verbindungslinie nach Gleichung (3) genauer!

$$\cos\delta_i = \sin\beta_A \sin\beta_v + \cos\beta_A \cos\beta_v \cos(\lambda_A - \lambda_v) \overset{\beta_v=0}{=} \cos\beta_A \cos(\lambda_A - \lambda_v)$$
$$\Longrightarrow \quad \delta_a = 146.7°,\ \ \delta_b = 31.1°$$

   (b) Berechne mit diesen Winkeln verbesserte Werte für die Bahngeschwindigkeit der Erde und die Astronomische Einheit!

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_L} = \frac{v_E}{c}\cos\delta_i \quad \Longrightarrow \quad v_E = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda_L}\frac{1}{\cos\Delta_a - \cos\Delta_b} = 29.4\frac{km}{s}$$
$$\Longrightarrow \quad 1AE = 148000000km$$

5. Die beiden Spektren zeigen deutlich eine Unsymmetrie im Doppler-Effekt bzgl. 1.7. und 19.1.. Diese beruht auf der Tatsache, dass sich die Entfernung zwischen Sonne und Arktur ändert, d.h. die Radialgeschwindigkeit v_R von Arktur ist ungleich 0.

   (a) Bewegt sich Arktur auf die Sonne zu ($v_r < 0$) oder entfernt er sich von ihr ($v_r > 0$)?
   Offensichtlich ist $|\Delta\lambda_a| < |\Delta\lambda_b|$. Die Relativgeschwindigkeit ist also am 1.7., wenn sich die Erde von Arktur fortbewegt, kleiner als am 19.1.. Also muss sich Arktur auf die Sonne zubewegen: $v_r < 0$

   (b) Versuche, die Unsymmetrie zu messen und daraus die Fluchtgeschwindigkeit von Arktur abzuschätzen (Literaturwert: -5$\frac{km}{s}$)!

$$\text{Angenommen,}\ \frac{\Delta\lambda_a}{\Delta\lambda_b} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$v_{E_a} = 21.4\frac{km}{s},\ v_{E_b} = -38.7\frac{km}{s} \quad \Longrightarrow \quad v_r = -8.7\frac{km}{s}$$

$$\text{Angenommen,}\ \frac{\Delta\lambda_a}{\Delta\lambda_b} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow$$
$$v_{E_a} = 25.7\frac{km}{s},\ v_{E_b} = -35.0\frac{km}{s} \quad \Longrightarrow \quad v_r = -4.7\frac{km}{s}$$

6. Welche weiteren Verfeinerungen könnten eventuell zu einem noch besseren Ergebnis für die Astronomische Einheit führen?