Über den Zusammenhang zwischen geometrischer Parallaxe und der Entfernung des Mondes

U. Backhaus

Universität Duisburg-Essen

Wenn man ein entferntes Objekt von verschiedenen Orten aus anpeilt, dann unterscheiden sich die Peilrichtungen um den so genannten ***Parallaxenwinkel Π****. Er hängt eng mit der Entfernung des Objektes zusammen: Je kleiner der Winkel ist, desto weiter ist das Objekt entfernt.*
In diesem Papier wird erläutert, wie man aus einem gemessenen Parallaxenwinkel die Entfernung des Mondes ableiten kann. Es werden unterschiedliche Methoden beschrieben, die mit zunehmender Schwierigkeit zu immer genaueren Ergebnissen führen können.

1 1. Näherung

Wenn die Entfernung zwischen den beiden Beobachtungsorten nicht bekannt ist, kann die Mondentfernung dadurch nach oben abgeschätzt werden, dass die größtmögliche Entfernung zwischen den beiden Orten angesetzt wird: der doppelte Radius R_E der Erde[1]. Dann gilt der folgende Zusammenhang zwischen dem Parallaxenwinkel Π und der Entfernung r_M des Mondes (Abb. 1):

$$\sin\frac{\Pi}{2} = \frac{R_E}{r_M}$$

Die Mondentfernung lässt sich in dieser Näherung also nach der folgenden Gleichung abschätzen:

$$r_M \approx \frac{R_E}{\sin\frac{\Pi}{2}} \tag{1}$$

In den meisten Fällen wird man zu einer besseren Abschätzung gelangen, wenn man einen nur halb so großen Abstand zwischen den Beobachtern annimmt:

[1] Streng genommen muss, wie Abbildung 1 zeigt, der Abstand etwas kleiner sein. Der Unterschied ist aber bereits beim Mond praktisch vernachlässigbar.

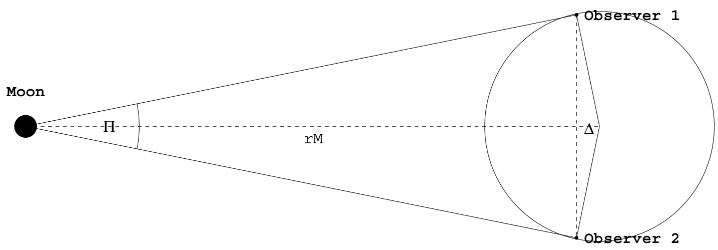

Abbildung 1: Abschätzung der Mondentfernung bei unbekanntem Abstand zwischen den Beobachtern

$$r_M \approx \frac{\frac{R_E}{2}}{\sin\frac{\Pi}{2}} \tag{2}$$

Beispiel: Für den am 9. Dezember 2000 zwischen Koblenz und der Namib-Wüste gemessenen Winkel $\Pi = 1.193°$ ergibt sich daraus $r_M \approx 48R_E$.

2 2. Näherung

Wenn die geografischen Koordinaten (φ, λ) der Beobachtungsorte bekannt sind, dann lässt sich der *lineare* Abstand Δ zwischen ihnen berechnen. Wenn beide Orte ungefähr auf demselben Längengrad liegen, kann die folgende einfache Beziehung herangezogen werden:

$$\sin\frac{|\varphi_2-\varphi_1|}{2} = \frac{\frac{\Delta_0}{2}}{R_E} \quad\Longrightarrow\quad \Delta_0 = 2R_E\sin\frac{|\varphi_2-\varphi_1|}{2} \tag{3}$$

Liegen die Beobachtungsorte näherungsweise auf demselben Breitengrad φ, dann gilt stattdessen

$$\Delta_0 = 2R_E\cos\varphi\sin\frac{|\lambda_2-\lambda_1|}{2}$$

Beispiel: Für die näherungsweise auf demselben Längenkreis liegenden Beobachtungsorte Koblenz ($\varphi_1 = 50.18°,\ \lambda = 7.54°$) und Namib-Wüste ($\varphi_2 = -22.70°,\ \lambda = 17.11°$) ergibt sich nach (3) $\Delta_0 = 1.188R_E$.

Mit der so bestimmten Näherung Δ_0 für den linearen Abstand und dem Parallaxenwinkel Π lässt sich die Mondentfernung nach Abbildung 3 näherungsweise berechnen aus:

$$\tan\frac{\Pi}{2} = \frac{\frac{\Delta_0}{2}}{r_M} \quad\Longrightarrow\quad r_M = \frac{\Delta_0}{2\tan\frac{\Pi}{2}} \tag{4}$$

Beispiel: Mit dem zwischen Koblenz und der Namib-Wüste gemessenen Parallaxenwinkel $\Pi = 1.193°$ ergibt sich auf diese Weise die Mondentfernung zu $r_M = 57.1R_E$.

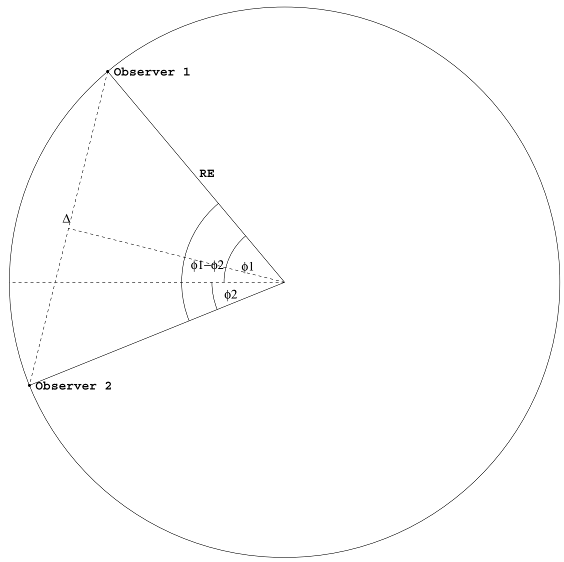

Abbildung 2: Zur Berechnung des linearen Abstandes Δ aus den geografischen Breiten der Beobachtungsorte

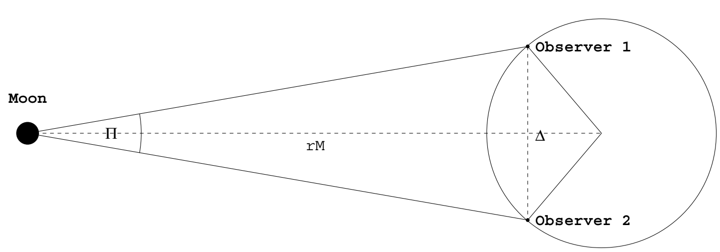

Abbildung 3: Zur näherungsweisen Berechnung der Mondentfernung aus dem gemessenen Parallaxenwinkel Π und dem linearen Abstand Δ

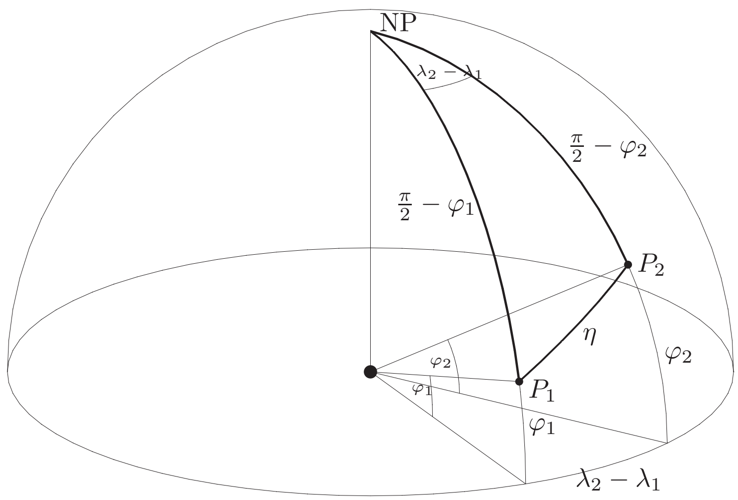

Abbildung 4: Zur Ableitung der Winkeldistanz zwischen zwei Orten aus ihren geografischen Koordinaten (φ, λ)

3 3. Näherung

Wenn die beiden Beobachtungsorte nicht näherungsweise auf demselben Längen- oder Breitenkreis liegen, muss ihr Abstand anders bestimmt werden.

3.1 Messung an einem Erdglobus

Den Abstand, den die beiden Orte *auf der Erdoberfläche* voneinander haben, kann man mit einem Faden messen. Die Länge dieses Fadens verhält sich dann zum Umfang wie der Winkel η zwischen den beiden Orten zu 360°. Und dieser Winkel η kann dann statt $\varphi_2 - \varphi_1$ in (3) eingesetzt werden, um den linearen Abstand Δ zu erhalten:

$$\Delta = 2R_E \sin \frac{\eta}{2} \tag{5}$$

Beispiel: Bei der Messung der Entfernung zwischen Koblenz und der Namib-Wüste ergab sich an einem Globus mit dem Umfang $U = 105.5cm$ eine Fadenlänge von $l = 21.8cm$. Der entsprechende Winkel beträgt demnach $\eta = 74.4°$. Daraus ergeben sich der lineare Abstand zu $\Delta = 1.209R_E$ und die Mondentfernung zu $r_M = 58.1R_E$.

3.2 Berechnung aus den geografischen Koordinaten

Für den Winkelabstand zwischen zwei Punkten (φ_1, λ_1) und (φ_2, λ_2) auf einer Kugeloberfläche gilt nach dem so genannten Seitencosinussatz (s. Abb. 4)

$$\cos\eta = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \tag{6}$$

Mit dem Winkel η lässt sich der korrekte lineare Abstand gemäß (5) berechnen, und die Mondentfernung ergibt sich mit derselben Beziehung wie (4):

$$\tan\frac{\Pi}{2} = \frac{\frac{\Delta}{2}}{r_M} \quad\Longrightarrow\quad r_M = \frac{\Delta}{2\tan\frac{\Pi}{2}} \tag{7}$$

Beispiel: Für Koblenz und die Namib-Wüste ergibt sich nach dieser Formel eine Winkeldistanz $\eta = 73.37°$ und daraus ein linearer Abstand $\Delta = 1.195 R_E$ und eine Mondentfernung von $r_M = 57.4 R_E$.

4 4. Näherung

Die Abschätzung nach Gleichung (4) kann nach Abbildung 3 offensichtlich noch verbessert werden, indem der Abstand des Schnittpunktes zwischen den beiden Verbindungslinien Mond-Erdmittelpunkt und Ort1-Ort2 vom Erdmittelpunkt berücksichtigt wird. Damit wird aus (4):

$$r_M = \frac{\Delta}{2\tan\frac{\Pi}{2}} + \sqrt{R_E^2 - \frac{\Delta^2}{4}} \tag{8}$$

Beispiel: Für die Messung von Koblenz und Namibia aus ergibt sich daraus eine Korrektur um $0.80 R_E$ und damit eine Mondentfernung von $r_M = 58.2 R_E$.

5 5. Näherung: Berücksichtigung des Projektionswinkels w

Bei der Ableitung der Näherungen (4) und (8) wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Verbindungslinie zwischen den beiden Beobachtern senkrecht auf der Richtung zum Mond steht. Im Allgemeinen wird das nicht der Fall sein. Abbildung 5[2] zeigt allerdings, dass zum hier beispielhaft ausgewerteten Zeitpunkt die Abweichung nicht groß war.

Für die Berechnung der Mondentfernung kommt es offensichtlich nicht auf den tatsächlichen linearen Abstand Δ zwischen den beiden Beobachtern an, sondern auf seine Projektion $\Delta' = \Delta \sin w$ parallel zur Verbindungslinie Erde-Mond.

$$r_M = \frac{\Delta \sin w}{2\tan\frac{\Pi}{2}} + \sqrt{R_E^2 - \frac{\Delta^2 \sin^2 w}{4}} \tag{9}$$

Die Berechnung des dabei zu berücksichtigenden Winkels w ist allerdings nicht ganz einfach. Um ihn bestimmen zu können, braucht man die Koordinaten der Erde, des Mondes und der beiden Orte in *demselben* Koordinatensystem. Dazu bietet sich das geozentrische Äquatorialsystem an.

[2] Dabei ist berücksichtigt, dass der Mond zum Beobachtungszeitpunkt eine Deklination von $\delta_M = 15.8°$ hatte.

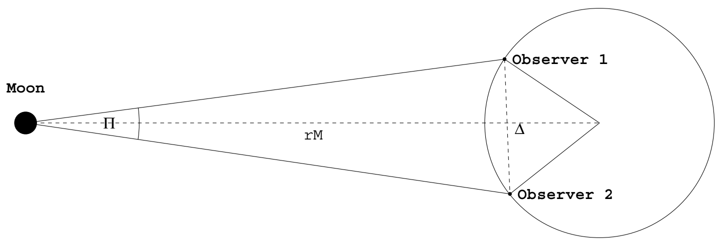

Abbildung 5: Die Positionen von Koblenz und Namibia am 9. Dezember 2000 um 21.00 Uhr UT relativ zum Mond

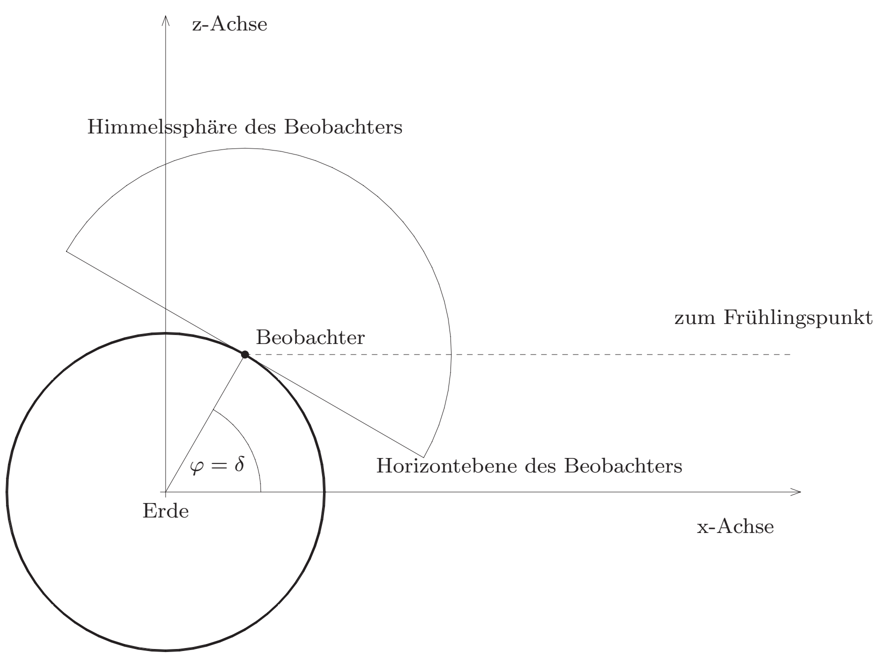

Abbildung 6: Zur Bestimmung der geozentrisch äquatorialen Koordinaten der Beobachtungsorte

Die Deklination δ der beiden Beobachtungsorte stimmt mit ihrer geografischen Breite φ überein (s. Abb. 6). Ihre Rektaszension ist gleich ihrer (lokalen) Sternzeit: Wenn die Sternzeit $\Theta = 0h$ ist, der Frühlingspunkt also gerade im Süden steht, ist die Rektaszension α des Beobachtungsortes auch 0h.

Die Ortssternzeit kann folgendermaßen berechnet werden:

1. Bestimme für den Tag der Beobachtung die Ortssternzeit $\Theta_{0_{Gr}}$ von Greenwich um 0.00 Uhr UT[3]

2. Zur Beobachtungszeit beträgt sie dort dann[4]

$$\Theta_{Gr} = \Theta_{0_{Gr}} + 1.0027379t.$$

   Dabei muss die Beobachtungszeit t in Stunden mit Dezimalen eingesetzt werden.

3. Die Sternzeit an einem Ort der geografischen Länge λ beträgt zu derselben Zeit

$$\Theta = \Theta_{Gr} + \frac{4min}{1^\circ}\lambda.$$

Beispiel: Am 9. Dezember 2000 um 0.00 Uhr UT betrag die Sternzeit in Greenwich $\Theta_{0_{Gr}} = 5h12m11s = 5.241h$. Um 21.00 Uhr UT betrug sie dort also $\Theta_{Gr} = 2.298h$. Die Sternzeiten an den Beobachtungsorten zu dieser Zeit waren also $\Theta_K = 5.744h \mathrel{\hat{=}} 86.16^\circ$ und $\Theta_N = 6.382 \mathrel{\hat{=}} 95.73^\circ$. Die äquatorialen Koordinaten der Beobachtungsorte sind demnach zum Beobachtungszeitpunkt $\alpha_K = 86.16^\circ$, $\delta_K = 50.18^\circ$ und $\alpha_N = 95.73^\circ$, $\delta_N = -22.7^\circ$.

Um den Projektionswinkel w berechnen zu können, benötigt man zusätzlich die äquatorialen Koordinaten (α_M, δ_M) des Mondes. Man rechnet dann alle Koordinaten gemäß

$$\begin{aligned} x &= R_E \cos\varphi \cos\delta \\ y &= R_E \sin\varphi \cos\delta \\ z &= R_E \sin\delta \end{aligned}$$

in carthesische Koordinaten um. Der gesuchte Winkel ergibt sich dann aus dem Skalarprodukt der Richtungen zum Mond und des Verbindungsvektors zwischen den beiden Beobachtungsorten:

$$\cos w = \frac{\vec{e}_M \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{10}$$

[3]Sie kann mit verschiedenen einfachen Verfahren bestimmt werden, z.B. aus dem zeitlichen Abstand zum Frühlingsanfang, an dem UT und Sternzeit in Greenwich gerade um 12 Stunden differieren. Man muss dann berücksichtigen, dass die Sternzeit jeden Tag 4 Minuten (3m56s) vorgeht. Sie kann auch einem aktuellen astronomischen Kalender entnommen werden.

[4]Der Faktor 1.0027379 beruht auf dem Umstand, dass sich die Erde in 24 Stunden mehr als einmal dreht, die Sternzeit also um mehr als 24 Stunden zunimmt.

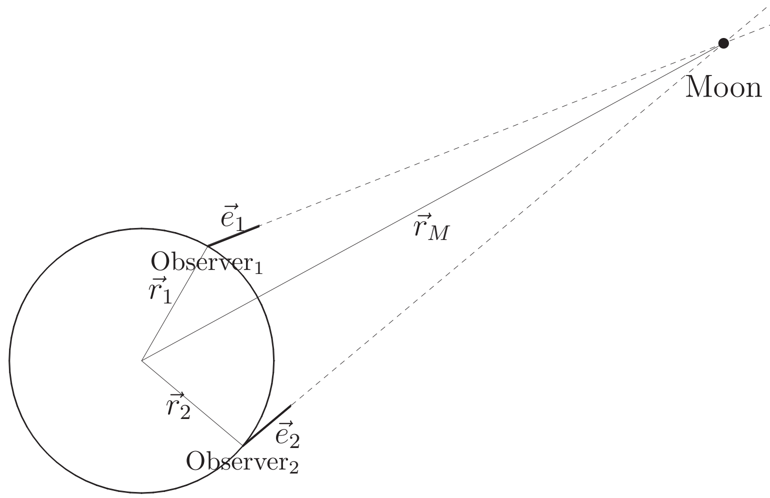

Abbildung 7: Zur Berechnung des Schnittpunktes der beiden Sichtlinien

Beispiel: Aus dem in Koblenz aufgenommenen Foto ergibt sich die Position des Mondes zu $\alpha_M = 3h45m52s \stackrel{\triangle}{=} 56.47°$ und $\delta_M = 16.48°$. Sein carthesischer Richtungsvektor ist also $(0.530, 0.800, 0.284)$. Die rechtwinkligen Koordinaten von Koblenz und Namibia sind $r_K = R_E(0.043, 0.639, 0.768)$ und $r_N = R_E(-0.092, 0.918, -0.386)$. Damit ergibt sich der Kosinus des Projektionswinkels w zu 0.147, das heißt, der Winkel beträgt $w = 81.5°$.

Damit ergibt sich in der 5. Näherung die Mondentfernung zu $r_M = 57.57 R_E$.

6 Korrekte Rechnung

Wenn $\vec{r}$ der (carthesische) Ortsvektor eines Beobachters ist und $\vec{e}$ die Richtung, in der er den Mond sieht, dann muss sich der Mond irgendwo auf der Geraden befinden, die durch

$$\vec{r} + \lambda\vec{e}, \qquad \lambda > 0$$

beschrieben werden kann. Wenn zwei Beobachter den Mond gleichzeitig anvisieren, dann muss sich der Mond am Schnittpunkt der beiden Sichtlinien befinden. Es muss also gelten:

$$\vec{r}_1 + \lambda\vec{e}_1 = \vec{r}_2 + \mu\vec{e}_2, \qquad \lambda,\ \mu > 0$$

Das sind drei Gleichungen mit nur zwei zu bestimmenden Unbekannten λ und μ! Anders als in einer Ebene werden sich die beiden Geraden nur bei exakten Messungen schneiden. Andernfalls verfehlen sie einander („windschiefe Geraden“). Wegen immer auftretender Messfehler wird also obiges Gleichungssystem niemals lösbar sein.

Aus diesem Grunde sind wir gezwungen, statt des Schnittpunktes die Stelle der größten Annäherung zwischen den beiden Geraden zu berechnen. Das heißt, wir suchen nach zwei Punkten $\vec{P}_1 = \vec{r}_1 + \lambda_1\vec{e}_1$ und $\vec{P}_2 = \vec{r}_2 + \mu_2\vec{e}_2$ auf den Geraden, deren Verbindungsvektor senkrecht auf beiden Geraden steht:

$$
\begin{aligned}
(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_1 &= 0, \\
(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Das ist ein System zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten λ_1 und μ_2. Eine einfache Umformung führt auf die folgenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 + \mu_2 &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{e}_2 - \vec{e}_1)}{1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}, \\
\lambda_1 - \mu_2 &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_1)}{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2},
\end{aligned}
$$

aus denen die gesuchten Parameter leicht zu berechnen sind:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2}\left((\lambda_1 + \mu_2) + (\lambda_1 - \mu_2)\right), \\
\mu_2 &= \frac{1}{2}\left((\lambda_1 + \mu_2) - (\lambda_1 - \mu_2)\right)
\end{aligned}
$$

Die Entfernung des Mondes ergibt sich dann schließlich zu

$$
r_M \approx |\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{e}_1| \approx |\vec{r}_2 + \mu_2 \vec{e}_2| \tag{11}
$$

Als Maß für die Genauigkeit des Ergebnisses kann man den Abstand $|\vec{P}_1 - \vec{P}_2|$ der beiden Sichtlinien nehmen.

Zusammenfassendes Beispiel: Aus den am 9. Dezember 2000 um 21.00 Uhr UT in Koblenz ($\varphi_K = 50.18°,\ \lambda_K = 7.54°$) und Namibia ($\varphi_N = -22.7°,\ \lambda_N = 17.11°$) aufgenommenen Fotos ergeben sich folgende Blickrichtungen zum Mond (das heißt: topozentrischen äquatorialen Koordinaten):

Ort	Mondposition			
	Rektaszension		Deklination	
Koblenz	3h46m01s	56.50°	15°17′23″	15.29°
Namibia	3h45m52s	56.47°	16°28′57″	16.48°

Damit ergibt sich nach (6) ein Parallaxenwinkel von $\Pi = 71.55'$. Die beiden Sichtlinien nähern sich auf $0.044R_E$ an, das sind etwa 8% des Monddurchmessers. Die Stelle der größten Annäherung hat die Entfernung $57.86R_E$ vom Erdmittelpunkt. Die geozentrische Mondentfernung ergibt sich also zu $r_M = 57.86R_E$.

7 Zusammenfassung

Methode	Gleichung	Mondentfernung in Erdradien
1. Näherung	(1)	48
2. Näherung	(4)	57.1
3. Näherung	(7)	58.1
		57.4
4. Näherung	(8)	58.2
5. Näherung	(9)	57.57
korrekte Rechnung	(11)	57.86
wahre Distanz		57.74

Die verschiedenen Methoden beruhen auf den folgenden Eingangsdaten:

Methode 1

- Winkelabstand zweier Referenzobjekte, evtl. abgeleitet aus den bekannten Koordinaten der Referenzobjekte
- Pixelkoordinaten dieser Referenzobjekte auf den Bildern zweier Beobachter
- Pixelkoordinaten des Mondes auf den beiden Bildern
- Parallaxenwinkel Π, abgeleitet aus den Pixelkoordinaten auf beiden Bildern

Methode 2

- zusätzlich die geografischen Breiten der Beobachtungsorte

Methode 3

- zusätzlich die geografischen Längen der Beobachtungsorte

Methode 4 (wie Methode 3)

Methode 5

- zusätzlich die Koordinaten des Mondes, abgeleitet z. B. aus einem der Fotos mit Hilfe der bekannten Koordinaten der Bezugsobjekte

korrekte Rechnung (wie Methode 5)