

Kann die Sonnenentfernung durch Phasenmessungen am Mond bestimmt werden?

A. Schmidt, U. Backhaus, Universität Duisburg-Essen

29. November 2015



Abbildung 1: Phasengestalten des Mondes

Beim Versuch, die Aristarch'sche Messung der Sonnenentfernung nachzuvollziehen, zeigt sich, dass die Winkeldistanz Mond-Sonne, z.B. mit einem Sextanten, ausreichend genau gemessen werden kann. Das entscheidende Problem bei dieser Methode besteht darin, den Zeitpunkt des Halbmondes auf wenige Minuten genau zu bestimmen, ohne dabei implizit den Wert der Sonnenentfernung vorauszusetzen. Die einzige Möglichkeit besteht anscheinend darin, die Mondphase direkt zu messen und damit den Zeitpunkt durch Beobachtung selbst zu bestimmen.

Im Rahmen einer Staatsexamensarbeit ist untersucht worden, wie genau mit verschiedenen Methoden der Phasenwinkel auf selbst aufgenommenen Mondfotos gemessen werden kann.

1 Einleitung: Die Entfernung der Sonne

Die Entfernung zur Sonne ist eine der wichtigsten Größen der Astronomie und Astrophysik ([1]). Deshalb wurden große Anstrengungen unternommen, den Wert der so genannten Astronomischen Einheit so genau wie möglich zu messen.

Aristarch war der Erste, der sich für den Wert interessierte, weil er aus der Entfernung der Sonne auf ihre Größe schließen und daraus ein Argument für ein heliozentrisches Weltmodell gewinnen wollte.

Der von Aristarch angegebene Wert war um den Faktor 19 zu klein. Trotzdem wurde er fast 2000 Jahre überliefert – ein Hinweis auf die Schwierigkeit der Messung.

Nachdem 1672 die erste zuverlässige Messung anhand der Bestimmung der Marsparallaxe gelungen war, lieferten etwa 100 Jahre lang die Beobachtungen von Venusdurchgängen die besten Werte für die Sonnenentfernung ([2]).

Heute ist der Wert mit fast beliebiger Genauigkeit bekannt. Eine Vielzahl von Messmethoden hat zu dieser Genauigkeit beigetragen. Das von Aristarch vorgeschlagene Verfahren ist deshalb nur noch von historischem und didaktischem Interesse. Wahrscheinlich ist es für tatsächliche Messungen niemals verwendet worden.

Von Interesse ist jedoch auch heute noch die Genialität von Aristarchs Idee und die prinzipielle Einfachheit und Fruchtbarkeit seines Vorschlages. Deshalb wurde in der Vergangenheit versucht, das Verfahren mit modernen Messgeräten zu wiederholen ([5]). Dabei stellte sich heraus, dass die größte Schwierigkeit dieser Methode in der genauen Bestimmung des Halbmondzeitpunktes liegt.

2 Aristarchs Methode zur Messung der Sonnenentfernung

Bei Halbmond, wenn der Mond von der Erde aus genau halb beleuchtet erscheint, ist das Dreieck Erde - Mond - Sonne beim Mond rechtwinklig. Misst man in dieser Situation den Winkelabstand ψ zwischen Mond und Sonne, z.B. mit einem Sextanten¹, dann kann man die Entfernung der Sonne als Vielfaches der Mondentfernung berechnen (Abb. 2).

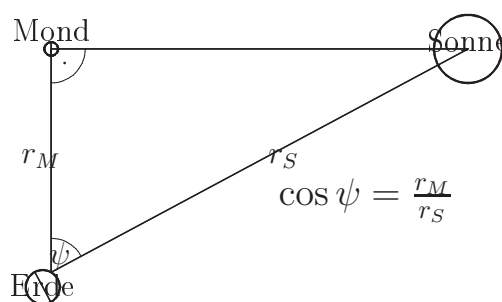


Abbildung 2: Aristarchs Idee

Da der Erddurchmesser gegenüber der Mondentfernung nicht vernachlässigbar, die Mondparallaxe also messbar ist, tritt der Zeitpunkt des Halbmondes an verschiedenen Orten der Erde zu unterschiedlichen Zeiten auf (Abb. 3). Die in astronomischen Jahrbüchern für den Erdmittelpunkt angegebene Uhrzeit weicht deshalb um bis zu zwei Stunden vom korrekten lokalen Zeitpunkt ab, muss also selbst bestimmt werden.

¹Dazu müssen Sonne und Halbmond *gleichzeitig* über dem Horizont zu sehen sein.

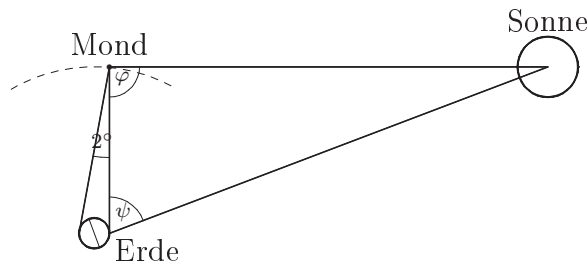


Abbildung 3: Mondphase und Mondparallaxe

Im Prinzip ist der aktuelle Phasenwinkel φ an der Phasengestalt des Mondes abzulesen: Bei Halbmond, wenn der Mond dem Beobachter genau halb beleuchtet erscheint, ist $\varphi = 90^\circ$. Ist der Mond sichelförmig, ist der Phasenwinkel größer als 90° , ist der Mond gewölbt, ist die Phase kleiner als 90° .

Die der Arbeit zu Grunde liegende Idee bestand darin zu versuchen, den genauen Phasenwinkel durch Auswertung guter Mondfotos zu bestimmen. Sollte das mit genügender Genauigkeit möglich sein, wäre man zur Bestimmung der Sonnenentfernung nicht auf den Halbmondzeitpunkt angewiesen: Misst man gleichzeitig den Phasenwinkel φ und die Winkeldistanz ψ zwischen Mond und Sonne, dann kennt man in dem Dreieck alle Winkel – und damit alle Seitenverhältnisse.

Mit diesem Ziel wurde der Mond mit einem sehr guten Fernrohr der Brennweite $f = 1300\text{mm}$ fotografiert. Der Phasenwinkel wurde anschließend durch Auswertung der entstandenen Bilder nach verschiedenen Methoden bestimmt und mit dem theoretischen Wert verglichen.

3 Methoden der Phasenbestimmung

Der genaue Zusammenhang zwischen Phasengestalt und Phasenwinkel ergibt sich folgendermaßen: Der Terminator, die Grenze zwischen Tag- und Nachtseite des Mondes, teilt den Mond, im Idealfall, in zwei gleich große Hälften, ist also ein Großkreis auf dem als kugelförmig angenommenen Mond. Von der Erde aus sieht man nicht senkrecht auf diesen Kreis, sondern unter dem Phasenwinkel φ . Der Kreis erscheint dadurch als Ellipse (Abb. 4).

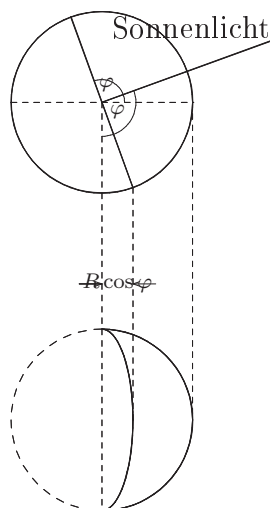


Abbildung 4: Projektion des Terminators

Bezeichnet man mit R den Radius des Mondes auf dem Bild und mit R' die kleine Halbachse der Terminatorellipse, dann lässt sich der Phasenwinkel φ offensichtlich aus der Beziehung

$$\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi = \frac{R'}{R}, \quad (1)$$

berechnen.

3.1 Methode 1: Flächenmessung am Computer

Ist ein Mondfoto digitalisiert, besteht grundsätzlich die Möglichkeit, automatisch zwischen beleuchteten und unbeleuchteten Pixeln zu unterscheiden. Aus Abstand und Länge paralleler Sehnen des beleuchteten Teiles kann dann der Krümmungsradius, und damit die Gesamtfläche des Mondes A_{Mond} auf dem Bild berechnet werden. Die Gesamtzahl der beleuchteten Pixel ist dann ein Maß für den beleuchteten Teil A_{hell} der „Mondscheibe“. Da sich diese aus der halben Mondfläche und der halben Fläche der Ellipse, die durch den Terminator gebildet wird, zusammensetzt, lässt sich aus dem Verhältnis der Phasenwinkel berechnen:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{A_{hell}}{\frac{A_{Mond}}{2}} - 1\right) \quad (2)$$

Ein Blick auf die Fotos in Abb. 1 veranschaulicht jedoch die Schwierigkeiten, die sich bei dieser Methode der Phasenbestimmung ergeben:

1. Die Mondoberfläche ist nicht glatt, der Terminator demzufolge keine Ellipse.
2. Der Schattenübergang am Terminator erfolgt selbst an glatten Stellen nicht abrupt.
3. Die Oberfläche ist nicht gleichmäßig hell.

Diese Umstände führen dazu, dass bei der Auswertung die Grenze zwischen „hellen“ und „dunkeln“ Pixeln nach verschiedenen Kriterien, immer aber recht willkürlich festgelegt werden muss.

3.2 Methode 2: Radiusmessung an Ausdrucken

Abbildung 5: Prinzip der Ausmessung

An einem Fotoabzug oder einem Computerausdruck lässt sich die Phasengestalt des Mondes, wie in Abb. 5 angedeutet, ausmessen.

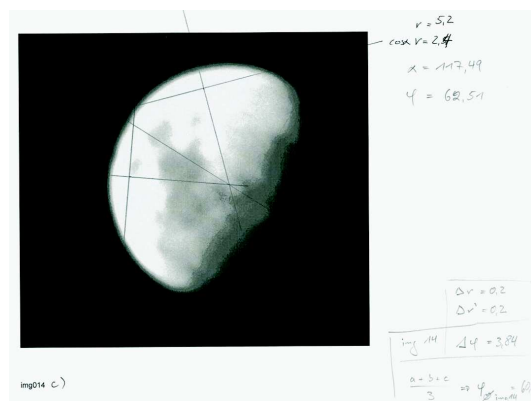


Abbildung 6: Ausmessung der Phasengestalt

Abb. 6 zeigt, dass sich bei dieser Methode dieselben Probleme wie der Flächenmessung ergeben.

3.3 Methode 3: Schablonenmethode

Die größten Erfolgsaussichten ergeben sich, wenn man die menschliche Fähigkeit zur Mustererkennung ausnutzt, um berechnete Kreis- bzw. Ellipsenschablonen an die unscharf begrenzten Formen des Mondumfanges und der Schattengrenze anzupassen: Bei dieser Methode kommt es nicht auf *lokale* Entscheidungen über hell/dunkel an. Die Anpassung erfolgt vielmehr durch *globale* Optimierung der Begrenzungskurve.

3.3.1 Simultanprojektion

In der Examensarbeit wurde diese Anpassung durchgeführt, indem berechnete Schablonen mit einem Videobeamer den projizierten Mondphasen überlagert wurden (Abb. 7).

Abbildung 7: Simultanprojektion

3.3.2 Am Computer

Später wurde zur Vereinfachung ein Computerprogramm entwickelt, das es ermöglicht, eingescannten Mondfotos am Computermonitor Kreis- und Ellipsenschablonen zu überlagern und diese durch einfache Tastensteuerung an die Phasengestalt anzupassen. Abb. 8 zeigt ein typisches Beispiel².

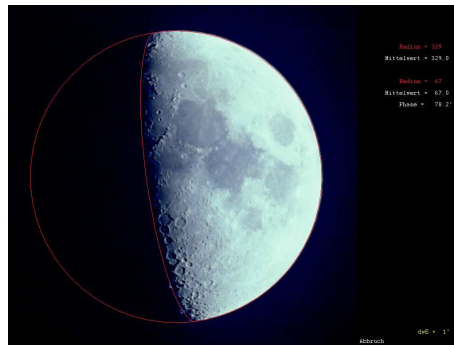


Abbildung 8: Schablonenanpassung am Computer

4 Ergebnisse

Insgesamt wurden ca. 200 Fotos aufgenommen und davon etwa die Hälfte, zum größten Teil in der Nähe des Halbmondes³, ausgewertet. Dabei erwies sich die Methode der automatischen Flächenbestimmung als völlig unzureichend. Die Ausmessung von Computerausdrücken war etwa um den Faktor 10 genauer, aber gemessen an dem gesetzten Ziel, die Sonnenentfernung zu messen, trotzdem unzureichend⁴.

Die genauesten Ergebnisse wurden bei der Simultanprojektion erzielt – wahrscheinlich eine Folge der Bildgröße und der fehlenden Digitalisierungsfehler. Bei dieser Methode wurde wenigstens annähernd die erforderliche Genauigkeit erzielt.

²In der CD-Version dieses Artikels kann nach einem Mausklick auf das Bild das Programm an Beispielbildern getestet werden.

³In der Nähe des Halbmondes ändert sich die Phasengestalt mit zunehmendem Phasenwinkel am schnellsten – ein Umstand, der bei regelmäßiger Mondbeobachtung auffällig ist. Er lässt bei $\varphi \approx 90^\circ$ die besten Ergebnisse erwarten.

⁴Bei Halbmond weicht die Winkeldistanz zwischen Sonne und Mond nur um 0.15° vom rechten Winkel ab. Der Fehler der Phasenmessung darf also höchstens von dieser Größe sein.

Methode	mittl. Abweichung $\Delta\varphi$
1	$\leq 24^\circ$
2	$\approx 2^\circ (< 10^\circ)$
3 a	$\approx 0.44^\circ$ (oft $\approx 0.25^\circ$)
3 b	$+2.4^\circ$

Die Schablonenanpassung am Computer wurde am häufigsten und von den meisten „Probanden“ getestet⁵. Trotzdem erwies sich das Verfahren als nicht ausreichend genau. Allerdings wurde hier deutlich, dass der Phasenwinkel fast immer zu groß gemessen, die beleuchtete Fläche also zu klein eingeschätzt wird. Hier deutet sich ein systematischer Fehler an, an den erst kürzlich von Schlosser ([4]) erinnert wurde.

5 Schlussfolgerungen

Die im Prinzip einfache Aristarch'sche Methode zur Messung der Sonnenentfernung scheitert daran, dass es nicht gelingt, durch Beobachtung selbst zu entscheiden, wann der Halbmond eintritt. Selbst durch Computerauswertung sehr guter Fotos kann der Phasenwinkel nicht genügend genau gemessen werden.

Von den vier untersuchten Verfahren erwies sich die Anpassung berechneter Schablonen an die fotografierte Phasengestalt des Mondes als am genauesten. Mit dieser Methode wäre es immerhin möglich, das von Aristarch angegebene Ergebnis deutlich zu verbessern. Allerdings lässt sich diese Genauigkeit nur an *Nachtaufnahmen* des Mondes erzielen. Eine gleichzeitige Messung der Winkeldistanz zur Sonne ist deshalb nicht möglich.

6 Zugabe: Ist der Mond am Horizont größer?

In den langen Nächten der Mondfotografie ergab sich nebenbei die Gelegenheit, die bekannte Mondillusion, derzufolge der auf- oder untergehende Mond viel größer erscheint als der hochstehende Mond, nicht nur zu widerlegen, sondern sogar ins Gegenteil zu wenden: Der genaue Größenvergleich des hochstehenden und des untergehenden Mondes mit der in 3.3.2 beschriebenen Schablonenmethode (Abb. 9⁶) zeigt:

Der Mond ist objektiv am Horizont sogar kleiner als bei seiner Kulmination.

Der Effekt beruht darauf, dass der Mond beim Untergang um fast einen Erdradius weiter vom Beobachter entfernt ist als bei seiner Kulmination. Tatsächlich ergab sich für die Aufnahmen vom 3./4.2.1998 (19.00 Uhr und 0.00 Uhr) ein Größenverhältnis von 1.014, das vom berechneten Wert von 1.012 wenig abweicht. Die gute Übereinstimmung lässt daran denken, aus dem Vergleich zweier solcher Fotos eine Abschätzung für die Entfernung zum Mond zu gewinnen.

⁵Wir danken den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Didaktik der Physik der Universität Essen, den Herren Dr. Wilfried Suhr und Thomas Kersting.

⁶In der CD-Version dieses Artikels kann nach einem Mausklick auf das Bild das Programm an Beispielbildern getestet werden.

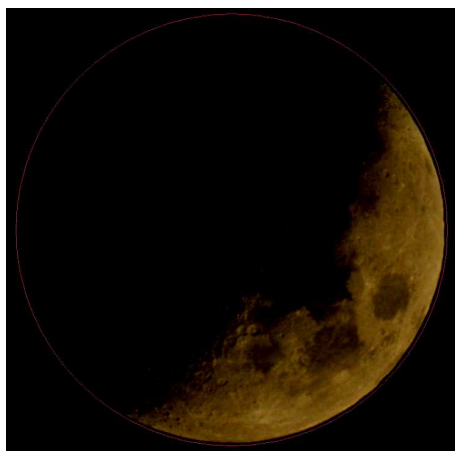


Abbildung 9: Vergleich zwischen horizontnahe (roter Kreis) und hochstehendem Mond

Literatur

- [1] U. Backhaus, *Die Entfernung der Sonne*, *Astronomie und Raumfahrt* 35/1, 30 (1998)
- [2] U. Backhaus, *Der Venusdurchgang 2004 – Start eines internationalen Projektes –*, Vorträge auf der Frühjahrstagung der DPG, Leipzig 2002
- [3] A. Schmidt, *Einsatz eines Linsenfernrohres bei Messungen am Mond*, Staatsexamensarbeit, Koblenz 1986
- [4] W. Schlosser, *Einfache Beobachtungen – überraschende Folgerungen*, *Astronomie und Raumfahrt* 40/1, 4 (2003)
- [5] D. Vornholz, U. Backhaus, *Wer hat recht – Aristarch oder der Sextant?*, *Astronomie und Raumfahrt* 31, 20 (1994)