Die analemmatische Bodensonnenuhr

Arnold Zenkert

Im Beitrag wird eine Möglichkeit zur Anlage einer analemmatischen Sonnenuhr vorgestellt, die weniger bekannt ist und sich von der bekannten Azimutwinkel-Methode durch eine größere Genauigkeit unterscheidet. Die Berechnungsformeln im Beitrag sind denkbar einfach und leicht zu bewältigen. Mit der »Polstabuhr ohne Polstab« hatten wir in MNU 47 (1994) 167 bereits eine ähnliche Sonnenuhr mit einem beweglichen Schattenwerfer beschrieben.

1 Einleitung

Die Vielfalt der Sonnenuhren ist groß. Man sieht sie als horizontale oder äquatoriale Objekte in Parkanlagen und auf Freiflächen. Mit über 75 % überwiegen die vertikalen Sonnenuhren an Gebäudewänden, die nicht nur die Zeit, sondern auch das Datum, italische, babylonische Stunden und sogar Daten zur Astrologie anzeigen. Hinzu kommen die vielen kleinen und transportablen Sonnenuhren, die aus einer Zeit stammen, als der Besitz einer mechanischen Uhr noch nicht selbstverständlich war. Die Gnomonik, die Wissenschaft von den Sonnenuhren, ist wie auch andere Wissenschaften nicht frei von Spielereien und Versuchen, immer neue Varianten zu finden. Im folgenden Beitrag wollen wir eine Sonnenuhr vorstellen, die es ermöglicht, selbst Schattenwerfer zu sein, um so »Sonnenuhr spielen« zu können. Diese analemmatische Sonnenuhr erfreut sich in pädagogischen Kreisen zuneh-

 MNU-Sonderheft Astronomie Seiten 48–53, ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

mender Beliebtheit und vermag im schulischen Bereich das Interesse an Astronomie und Mathematik zu wecken sowie auch etwas Spaß zu bereiten.

2 Über den Schattenverlauf

Wie oft kann man auf Campingplätzen und an Stränden beobachten, wie eine Sonnenuhr gebaut wird. Man steckt einen Stock senkrecht in die Erde, mit kleinen Steinen wird die Uhrzeit gekennzeichnet und der Schönwetter-Zeitanzeiger ist fertig. Für die kurze Zeit des Aufenthaltes mag diese »Sonnenuhr« genügen, man weiß, wann Mittag oder eine Kaffeepause ist. Eine Sonnenuhr im Sinne der Mathematik ist es jedoch nicht. Sähen wir uns diese Feriensonnenuhr nach einigen Monaten an, könnten wir Ungenauigkeiten von 1 bis 2 Stunden feststellen. Die Ursache dafür ist die ständig wechselnde Höhe der Sonne im Jahreslauf, d. h. der Schatten fällt zur gleichen Zeit nicht immer in die gleiche Richtung. So bildet z. B. der Schatten auf der Breite von 52° zwischen 12 Uhr wahrer Ortszeit (WOZ) und 11 Uhr bzw. 13 Uhr folgende Winkel: 27,8° am 21.6., 18,8° am 20.3./23.9. und 14,1° am 21.12. (Abb. 1).

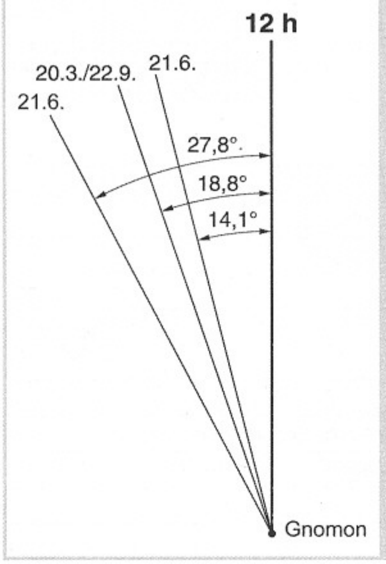

Abb. 1. Schattenwurf eines Gnomon 1 Stunde vor 12 Uhr wahrer Ortszeit an verschiedenen Tagen des Jahren

Schüleraufgabe: Ein beliebig langer Stab wird senkrecht in die Erde gesteckt. Im Abstand von 2 bis 3 Wochen wird zu einem bestimmten Zeitpunkt (z. B. 14 Uhr) der Winkel zwischen der Südrichtung (Meridian) und dem Schatten gemessen und notiert. Zu welcher Zeit im Jahr sind die Winkel am größten?

Wir merken uns: *Im Sommer macht die Sonne pro Zeiteinheit größere Schritte als im Winter.*
Wer hat nicht schon an seiner Hauswand oder auf dem Balkon bemerkt, dass die Sonne im Verlauf des Jahres zu unterschiedlichen Zeiten erscheint oder verschwindet? Die Frage, wie lange eine nach Süden gerichtete Ost-West-Wand Sonnenschein bekommt, wird oft mit 12 Stunden beantwortet. Dies trifft jedoch nur für die Tagundnachtgleichen am 20.3./22.9. (in manchen Jahren: 21.3./23.9.) zu. Am längsten Tag des Jahres (21.6.) beginnt die Besonnung erst um 7:22 Uhr und endet bereits um 16:38 Uhr, dauert also nur 9 Stunden 36 Minuten (für die geografische Breite von 51°).

Somit kann ein senkrechter Schattenwerfer kein zuverlässiger Zeitanzeiger sein. Das gleiche gilt auch für einen waagerechten Stab an einer senkrechten Wand, wie dies bei den sog. mittelalterlichen Sonnenuhren aus der Zeit vor 1500 der Fall war.
Doch gibt es auch in der Gnomonik »Tricks«, um einen senkrechten Stab für eine Sonnenuhr zu verwenden: Man muss ihn entlang einer Strecke verschieben und erzielt damit genaue Zeitanzeige wie bei einem Polstab. Bei einem »wandernden« Schattenwerfer erhält man eine sog. analemmatische Sonnenuhr, die i.a. als Bodensonnenuhr bezeichnet wird.
Bereits PTOLEMÄUS befasste sich mit dieser Problematik und erfand eine Sonnenuhr mit einem verschiebbaren Gnomon, um die veränderte Zeitanzeige im Laufe eines Jahres auszugleichen. Infolge der komplizierten Einzelheiten geriet diese Methode in Vergessenheit.
Vor über 150 Jahren griffen französische Uhrenbauer die Idee des PTOLEMÄUS wieder auf und konstruierten eine Sonnenuhr, deren beweglicher Stab auf das jeweilige Datum gestellt wurde. Eine derartige Einrichtung wird als Analemma oder Azimut-Analemma bezeichnet. Das Wort enstammt dem Altgriechischen und bedeutet soviel wie »Hilfseinrichtung«. Ein Analemma ist eigentlich Hilfssatz, z. B. in der Mathematik.
Den Stab können wir uns sparen, und wir stellen uns selbst als senkrechten Schattenwerfer auf die erwähnte Strecke. So können wir an sonnigen Tagen auf einer horizontalen Fläche von (8 x 4,5) m² Sonnenuhr spielen, ganz gleich, wie groß ein jeder ist. Man stellt sich auf das betreffende Datum, zu dem eine bestimmte Sonnendeklination gehört und sieht, auf welche Stundenbezeichnung der eigene Schatten fällt (Abb. 2).

3 Die Größe der Bodensonnenuhr

Der Unterschied zu einer Polstabsonnenuhr besteht darin, dass es keine Stundenlinien, sondern *Stundenpunkte* gibt, die auf einer Ellipse angeordnet sind. Die Größe des elliptischen Zifferblattes wird vorher festgelegt und darf nicht zu groß sein, da sonst der Schatten bei hoch stehender Sonne nicht mehr die Stundenpunkte erreicht. Wir wählen für die Ellipse eine große Halbachse von m = 400 cm,

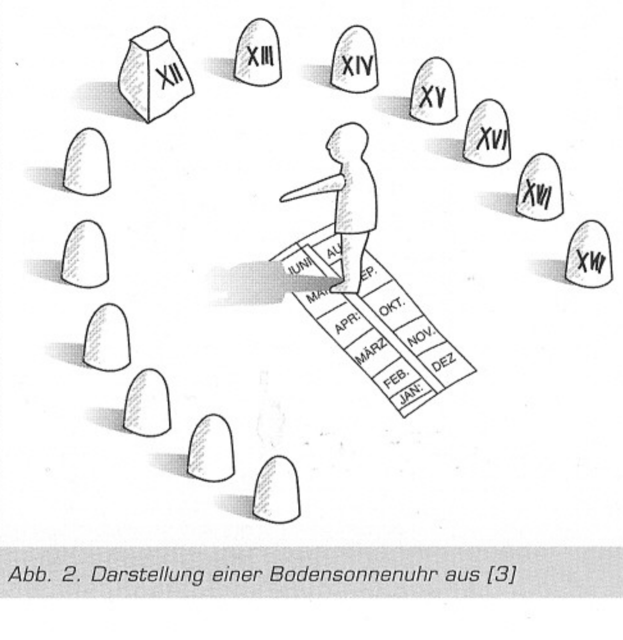

Abb. 2. Darstellung einer Bodensonnenuhr aus [3]

die Gesamtlänge beträgt demnach 800 cm. Da die Gestaltung der Sonnenuhren von der geografischen Breite ϕ abhängt, gelten in dem vorliegenden Beitrag alle Berechnungen für 51° (Köln, Erfurt, Dresden). Unterschiede von 1° nach Nord oder Süd wirken sich nicht gravierend aus, zumal der Körperschatten eine gewisse Breite einnimmt. In den Tabellen 3 und 4 befinden sich Berechnungen für Norddeutschland (53,5°) und Süddeutschland (48,5°), um eine größere Genauigkeit zu erreichen.
Für die Berechnung der kleinen Halbachse b gilt:

$$b = m \cdot \sin\phi = 400 \text{ cm} \cdot 0{,}777145 = 311 \text{ cm}.$$

4 Festlegung der Datumsstrecke

Die Einteilung der Datumsstrecke ist von der Deklination der Sonne abhängig und kann daher auch als Deklinationsstrecke bezeichnet werden (Abb. 3). Die Deklination ist der Winkelabstand eines Gestirns vom Himmelsäquator und schwankt bei der Sonne im Jahr zwischen + 23,44° am 21.6. und – 23,44° am 21.12. Die Datumseinteilung d wird mit folgender Formel berechnet: $d = m \cdot \tan\delta \cdot \cos\phi$. Wie aus der Formel zu ersehen ist, wird die Länge durch die gewählte große Halbachse mitbestimmt.
Die in Tabelle 1 genannten Abstände d werden von der Strecke AB, die dem 20.3. bzw. 22.9. ($\delta = 0°$) entspricht, aufgetragen. Im Sommerhalbjahr bis zum 21.6. liegen die Daten in Richtung Nord, im Winterhalbjahr bis zum 21.12. in Richtung Süd. In der Nähe der Sonnenwenden

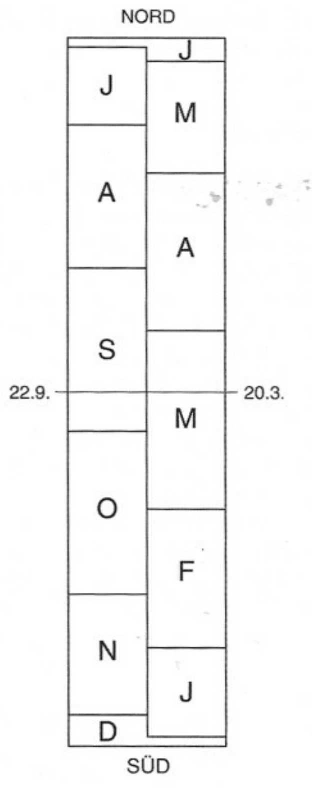

Abb. 3. Datums- und Deklinationsstrecke. Diese Darstellung enthält nur die Monatsersten. Die Abstände von der Waagerechten sind der Tabelle im Text zu entnehmen.

Datum	**Deklination δ**	**Abstand *d* in cm**	
0.3.	0,0°	0	Liegt auf AB, Frühlingsbeginn
1.4.	4,6°	20	In Richtung Nord auftragen
15.4.	9,8°	43	
1.5.	15,1°	68	
15.5.	18,9°	87	
1.6.	22,0°	102	
21.6.	23,5°	109	Hälfte der Gesamtstrecke, Sommerbeginn
15.7.	21,5°	99	In Richtung Süd auftragen
1.8.	18,0°	82	
15.8.	14,0°	63	
1.9.	8,3°	37	
15.9.	3,0°	14	
22.9.	0,0°	0	Liegt auf AB, Herbstbeginn
1.10.	– 3,2°	14	
15.10.	– 8,5°	38	
1.11.	– 14,4°	65	
15.11.	– 18,5°	84	
1.12.	– 21,8°	101	
21.12.	– 23,5°	109	Hälfte der Gesamtstrecke, Winterbeginn
15.1.	– 21,3°	98	In Richtung Nord auftragen
1.2.	– 17,3°	78	
15.2.	– 13,0°	58	
1.3.	– 7,6°	34	
15.3.	– 2,1°	9	
20.3.	0,0°	0	Siehe oben

Tab. 1. Maße für die Datumsstrecke (für 51° geogr. Breite). Die Deklinationswerte sind dem Jahrbuch für 2000 entnommen. Infolge des Schaltjahreszyklus treten Veränderungen von einem Tag auf, was hier ohne Bedeutung ist.

Wahre Ortszeit	*H* in cm	*V* in cm	Bezeichnung der Punkte
12:00	0	311	
11:30 und 12:30	52	308	
11:00 und 13:00	104	300	*e* und *f*
10:30 und 13:30	153	287	
10:00 und 14:00	200	269	*d* und *g*
9:30 und 14:30	244	247	
9:00 und 15:00	283	220	*c* und *h*
8:30 und 15:30	317	189	
8:00 und 16:00	346	155	*b* und *i*
7:30 und 16:30	370	119	
7:00 und 17:00	386	80	*a* und *j*
6:30 und 17:30	397	41	
6:00 und 18:00	400	0	*A* und *B*
5:30 und 18:30	397	41	
5:00 und 19:00	386	80	
4:30 und 19:30	370	119	
4:00 und 20:00	346	155	

Tab. 2. Maße für die Abstände H und V

kann auf einige Angaben verzichtet werden. Die Länge der Datumsstrecke beträgt somit 218 cm, für die Breite genügen etwa 50 cm.

5 Festlegung der Stundenpunkte

Die elliptisch angeordneten *Stundenpunkte* (Abb. 4) können mittels kleiner Pfähle oder Platten gekennzeichnet werden. Die Punkte für die Halbstunden, die nicht in der Mitte zwischen den Vollstunden liegen, werden kleiner dargestellt.

Die Berechnung der Stundenpunkte geschieht in zwei Schritten, wofür die Strecke AB, die große Halbachse, wichtig ist. Zuerst werden die *horizontalen Abstände H* von der Strecke CD, der Mittagslinie (12 Uhr), berechnet:

$H = m \cdot \sin\tau$. Mit τ wird der Stundenwinkel der Sonne bezeichnet. Es ist dies der Winkelabstand vom Südmeridian, z. B. für 12 h 0°, 13 h 15°, 14 h 30°, 15 h 45° usw. Die Stundenwinkel für die Halbstunden liegen in der Mitte zwischen den Vollstunden, also 7,5°, 22,5°, 37,5° usw. Der Stundenwinkel der Sonne gibt die *wahre Ortszeit* an, die Sonnenuhrenzeit. Für 12 h ist *H* gleich 0, die größten Werte werden bei 6 h und 18 h erreicht. Die Abstände *H* sind für den Vor- und Nachmittag spiegelbildlich, es genügt daher die Berechnung einer Seite. *H* ist nicht von der geografischen Breite abhängig und kann daher in der Tabelle 4 entfallen.

Nachdem die Werte für die Punkte *a* bis *j* festliegen, werden darauf die *vertikalen Abstände V* nach der Formel $V = m \cdot \sin\phi \cdot \cos\tau$ berechnet. Für 6 h und 18 h gelten 0, für 12 h entspricht dies der kleinen Halbachse von 311 cm. Bei den Punkten *a* bis *j* auf der Strecke AB ist auf die rechten Winkel zu achten. Für die Stunden 5 h und 4 h gelten die Werte für 7 h und 8 h, für 19 h und 20 h die für 17 h und 16 h.

Mit der rechnerischen Ermittlung der Stundenpunkte wird eine größere Genauigkeit erzielt als mit der bekannteren Methode, mit Hilfe der Azimutwinkel den Schnittpunkt zweier Linien zu bestimmen.

Datum	Deklination δ	Abstand *d* in cm für Norddeutschland (ϕ = 53,5°)	Abstand *d* in cm für Süddeutschland (ϕ = 48,5°)
0.3.	0,0°	0	0
1.4.	4,6°	19	21
15.4.	9,8°	41	46
1.5.	15,1°	64	72
15.5.	18,9°	81	91
1.6.	22,0°	96	107
21.6.	23,5°	103	115
15.7.	21,5°	94	104
1.8.	18,0°	77	86
15.8.	14,0°	59	66
1.9.	8,3°	35	39
15.9.	3,0°	12	14
22.9.	0,0°	0	0
1.10.	– 3,2°	13	15
15.10.	– 8,5°	36	40
1.11.	– 14,4°	61	68
15.11.	– 18,5°	80	89
1.12.	– 21,8°	95	106
21.12.	– 23,5°	103	115
15.1.	– 21,3°	93	103
1.2.	– 17,3°	74	83
15.2.	– 13,0°	55	61
1.3.	– 7,6°	32	35
15.3.	– 2,1°	9	10
20.3.	0,0°	0	0

Tab. 3. Maße für die Datumsstrecke d für andere geografische Breiten ϕ in Deutschland.
Norddeutschland: Große Halbachse 400 cm, kleine Halbachse 322 cm, Datumsstrecke 206 cm.
Süddeutschland: Große Halbachse 400 cm, kleine Halbachse 300 cm, Datumsstrecke 230 cm.

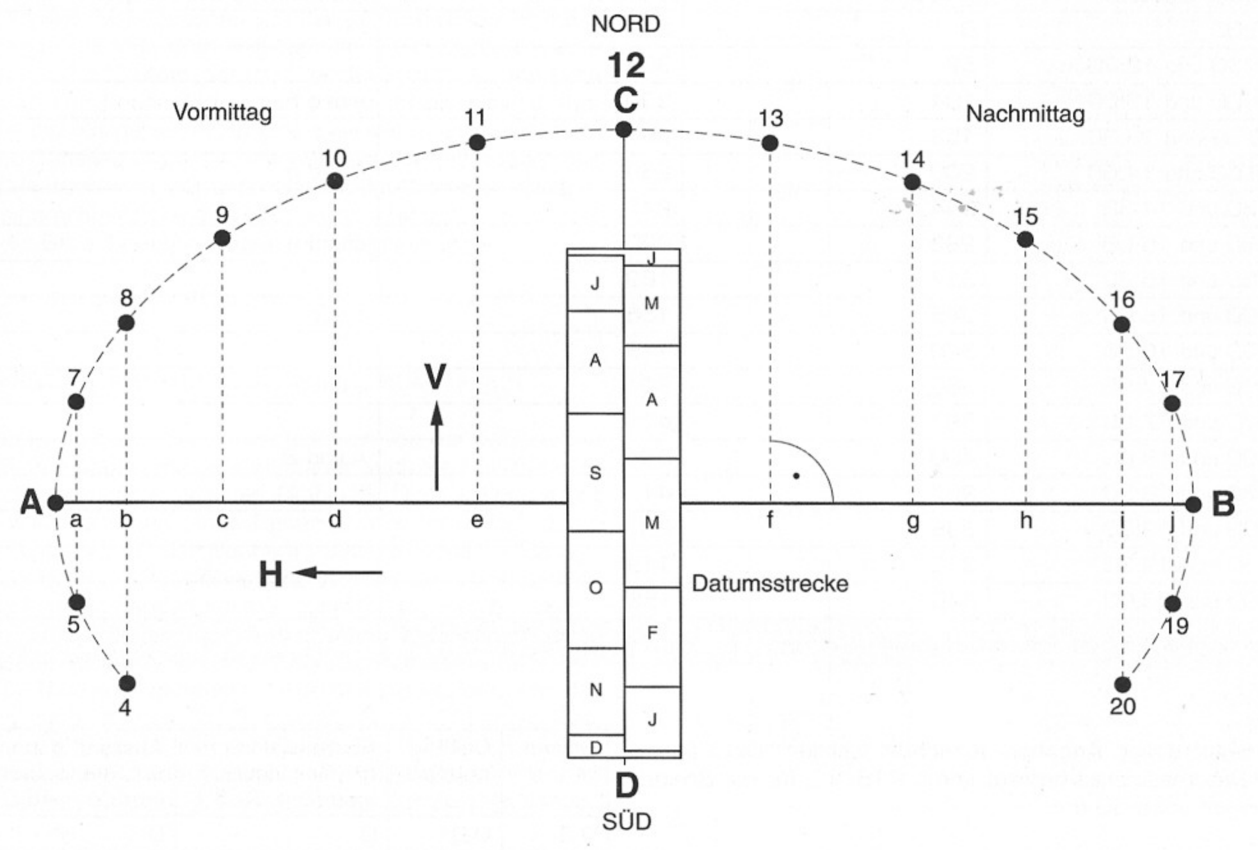

Abb. 4. Die Ermittlung der Stundenpunkte nach [1]

Wahre Ortszeit	*V* in cm für Norddeutschland (ϕ = 53,5°)	*V* in cm für Süddeutschland (ϕ = 48,5°)	Bezeichnung der Punkte
12:00	322	300	
11:30 und 12:30	319	297	
11:00 und 13:00	311	289	*e* und *f*
10:30 und 13:30	297	277	
10:00 und 14:00	278	259	*d* und *g*
9:30 und 14:30	255	238	
9:00 und 15:00	227	212	*c* und *h*
8:30 und 15:30	196	182	
8:00 und 16:00	161	150	*b* und *i*
7:30 und 16:30	123	115	
7:00 und 17:00	83	76	*a* und *j*
6:30 und 17:30	42	39	
6:00 und 18:00	0	0	*A* und *B*
5:30 und 18:30	42	39	
5:00 und 19:00	83	76	
4:30 und 19:30	123	115	
4:00 und 20:00	161	150	

Tab. 4. Maße für die vertikalen Abstände V für andere geografische Breiten ϕ in Deutschland

Abschließend sei hier noch erwähnt, dass es auch analemmatische Vertikaluhren gibt, bei denen analog verfahren wird. Der Schattenwerfer wird entlang einer senkrechten Datumslinie verschoben.

Bei der Zeitanzeige ist zu beachten, dass die Fersen auf dem betreffenden Datum stehen müssen. Sollte bei hoch stehender Sonne der Schatten zu kurz sein, hebe man den Arm oder einen Stock senkrecht in die Höhe. Der

Abstand vom 21.6. auf der Datumstrecke bis zum Punkt C (12 h) beträgt 311 cm – 109 cm = 202 cm. Das bedeutet, dass ein Schattenwerfer von 170 cm Höhe bei einer Mittagshöhe der Sonne von 62,5° am 21.6. einen Schatten von nur 88 cm Länge wirft.
Mit den Stundenpunkten ist unsere »lebende Sonnenuhr« fertig und wir können »Sonnenuhr spielen«. Die Praxis hat gezeigt, dass dies den Schülerinnen und Schülern Freude und Spaß bereitet und auch ein wenig zur unterhaltsamen Wissenschaft beiträgt.

6 Normalzeit und Sonnenuhrenzeit

Nach der Devise »Spielend lernen – Lernen durch Spielen!« kann hier auch das Thema Zeit anschaulich und leicht verständlich behandelt werden. Die Frage, wie genau eine Sonnenuhr gehe, wird oft gestellt. »Sonnenuhren gehen falsch« ist oft, besonders in den westlichen Gebieten Deutschlands, zu hören, was infolge der großen Längendifferenz zu Görlitz verständlich ist.
Eine Sonnenuhr zeigt stets die *wahre Ortszeit* (WOZ), die Sonnenzeit, an und kennzeichnet somit den Stand der Sonne am Himmel in Höhe und Richtung. Die wahre Ortszeit hängt von der geografischen Länge ab, die sich pro Längengrad um 4 Minuten unterscheidet. Diese von der Längendifferenz abhängige *Ortszeitdifferenz* gegenüber der Normalzeit (MEZ), die eigentlich eine »künstliche« Zeit darstellt, ist bei der Sonnenuhrenanzeige stets zu beachten. Die MEZ richtet sich nach der sog. mittleren Ortszeit von Görlitz in Deutschland und Gmünd in Österreich (15° ö. L.). Da das gesamte Gebiet Deutschlands westlich von Görlitz liegt, geht hier die wahre Ortszeit stets nach. Dieses Nachgehen können wir bei unserer Bodensonnenuhr gut beobachten, es sei, man befände sich nahe dem Längenkreis von Görlitz. Östlich von Görlitz geht die wahre Ortszeit vor, was für den östlichen Teil Österreichs zutrifft.
Auf die Zeitgleichung, die im Jahr ein Vorgehen von 16,4 Minuten (4.11.) und ein Nachgehen von 14,3 Minuten (12.2.) der Sonnenuhr bewirkt, soll hier nicht eingegangen werden.
Schüleraufgabe: Zu bestimmen ist die Ortszeitdifferenz von Stralsund, Erfurt, Hamburg, Stuttgart, Köln und Aachen gegenüber der MEZ.

Literatur

[1] A. E. WAUGH: Sundial, their Theory an construction. – New York: Dover Publications Inc. 1973.
[2] A. ZENKERT: Faszination Sonnenuhr. 3. Aufl. – Frankfurt/M: Harri Deutsch 2000.
[3] H. SCHUMACHER: Sonnenuhren. – München: Callwey-Verlag 1973.

StR i. R. ARNOLD ZENKERT, Seestraße 17, 14467 Potsdam