

Astronomie mit einer Sonnenuhr

U. Backhaus und H. J. Schlichting

(aus: W. Kuhn (Hrsg.): Vorträge der Tagung der DPG 1987 in Berlin, S. 299)

1 Einleitung

Im Anschluss an den vorhergehenden Aufsatz wollen wir hier die Untersuchung und Auswertung der zeitlichen Veränderung von Schatten näher ausführen. Die Verfolgung des zeitlichen Verlaufes von Schatten ermöglicht Aussagen über

- die geographische Breite des Beobachtungsortes,
- die genaue Südrichtung,
- die Schiefe der Ekliptik,
- die geographische Länge des Beobachtungsortes,
- die Jahreslänge und
- die Exzentrizität der Erdbahn.

Wir wollen uns hier konzentrieren auf den Vergleich zwischen der wahren Ortszeit, die eine richtig aufgestellte Sonnenuhr anzeigt, und der Zonenzeit, die man von einer gut gehenden Armbanduhr ablesen kann. Dabei benutzen wir für die Messungen und Argumentationen eine Sonnenuhr, obwohl die erforderlichen Daten ebenso mit einem einfachen Schattenstab (Gnomon) gewonnen werden könnten.

2 Vorauszusetzende Grundtatsachen

Die hier dargestellten Überlegungen stehen am Ende einer längeren Beschäftigung mit astronomischen Grunderscheinungen. Sie setzen deshalb ein Wissen voraus über

- die tägliche Sonnenbahn im Wechsel der Jahreszeiten und die Bestimmung von genauer Südrichtung, Ekliptikschiefe und geographischer Breite und
- die tägliche Drehung des Himmelsgewölbes, deren Dauer von ungefähr 23h56min eine Differenz von 4 min zum täglichen Sonnenumlauf aufweist, die sich im Laufe eines Jahres zu 24 Stunden aufsummiert.

Diese Beobachtungen können folgendermaßen zusammengefasst werden: Die Sonne läuft entgegen der täglichen Drehung des Himmelsgewölbes einmal im Jahr um den Sternenhimmel. Diese Bewegung verlängert den Sonnentag um durchschnittlich 3min56s gegenüber dem Sternentag. Die jährliche Sonnenbahn (Ekliptik) ist um 23.5° gegen den Himmelsäquator geneigt. Die Anfänge der Jahreszeiten entsprechen den Extrema (Sommer- und Winteranfang) der Bahn.

3 Sonnenuhr

Wegen der Gleichförmigkeit des täglichen Sonnenumlaufes und der unveränderlichen Neigung der täglichen Sonnenbahn gegen die Horizontebene ist der zeitliche Verlauf des Schattens besonders einfach für einen Stab, der senkrecht auf der Sonnenbahnebene (d. h. parallel zur Rotationsachse) steht, der also genau nach Norden zeigt und mit der Horizontalen einen Winkel bildet, der der geographischen Breite des Beobachtungsortes entspricht. Seltsamerweise scheint diese scheinbar so naheliegende Idee erst Ende des Mittelalters entstanden zu sein. Weiter vereinfacht sich der Verlauf, wenn man den Schatten auf einer Fläche auffängt, die den Stab zylindrisch umgibt (Ringkugeluhr), oder auf einer Fläche, die senkrecht auf dem Stab steht (Äquatorialsonnenuhr).

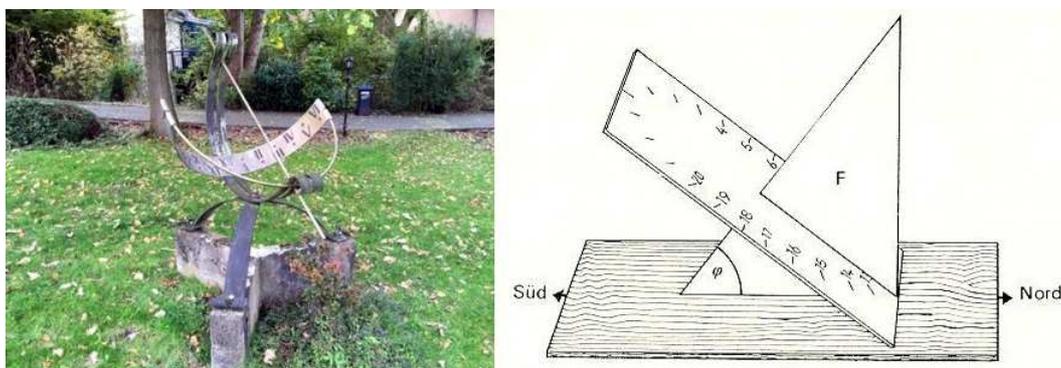


Abbildung 1: Ringsonnenuhr (links) und Äquatorialsonnenuhr

Letztere ist nicht nur besonders einfach selbst zu bauen, sie zeigt auch sehr anschaulich den Wechsel der Sonne vom nördlichen zum südlichen Sternenhimmel und umgekehrt: Im Sommerhalbjahr kann sie von oben, im Winterhalbjahr dagegen muss sie von unten abgelesen werden.

4 Auswertung der lokalen Mittagszeit

Die Zeit, die eine solche Sonnenuhr anzeigt, stimmt (zumindest in unserem Land) nie mit der Zeit überein, die eine richtiggehende Uhr anzeigt. Zur näheren Untersuchung dieser Diskrepanz misst man im Laufe eines Jahres so oft wie möglich die Differenz zwischen wahrer Ortszeit (Sonnenuhr) und Zonenzeit (Armbanduhr), indem man z. B. den genauen

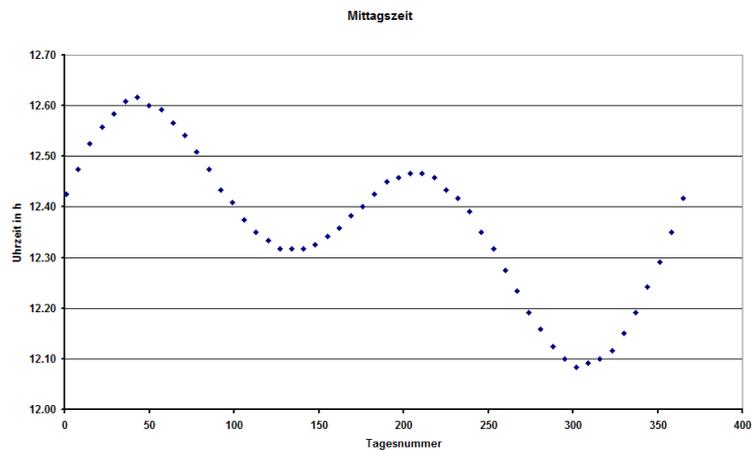


Abbildung 2: Lokale Mittagszeit 1986

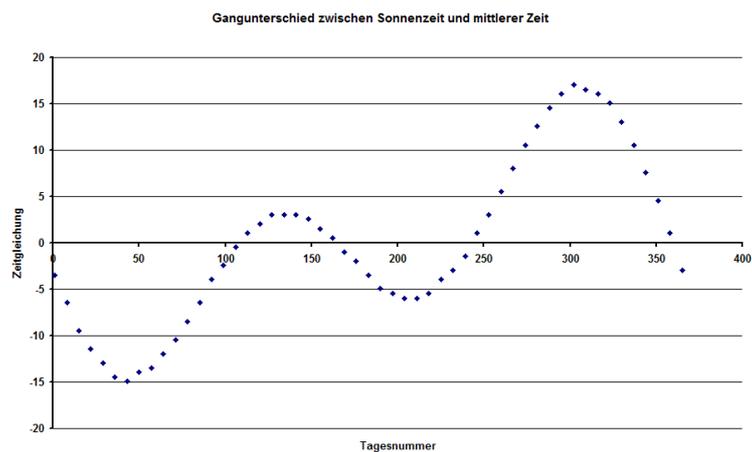


Abbildung 3: Zeitgleichung

Zeitpunkt festhält, zu dem die Sonnenuhr 12 Uhr anzeigt. Abbildung 3 zeigt das Ergebnis einer solchen Beobachtungsreihe für 1986.

Die wahre Mittagszeit unterliegt starken Schwankungen. Diese wiederholen sich jedes Jahr, zeigen aber außerdem eine quasiperiodische Veränderung, die sich jedes Halbjahr wiederholt.

Die Auswertung ergibt zunächst eine mittlere Mittagszeit von 12.28 Uhr. Aus ihr kann die geographische Länge des Aufstellungsortes bestimmt werden: Die Zonenzeit (MEZ) ist im Mittel richtig für Orte mit der geographischen Länge 15° ö. L.. Da sich die Erde in 4 min um 1° weiterdreht, muss der Beobachtungsort um 7° westlicher liegen: 8° ö. L. ist die geographische Länge von Osnabrück.

Abbildung 3 zeigt die verbleibende Schwankung um den Mittelwert, die so genannte Zeitgleichung. Wie üblich wurde dabei das Vorzeichen umgedreht: Positive Werte bedeuten, dass die Sonnenuhr gegenüber der mittleren Zeit vorgeht.

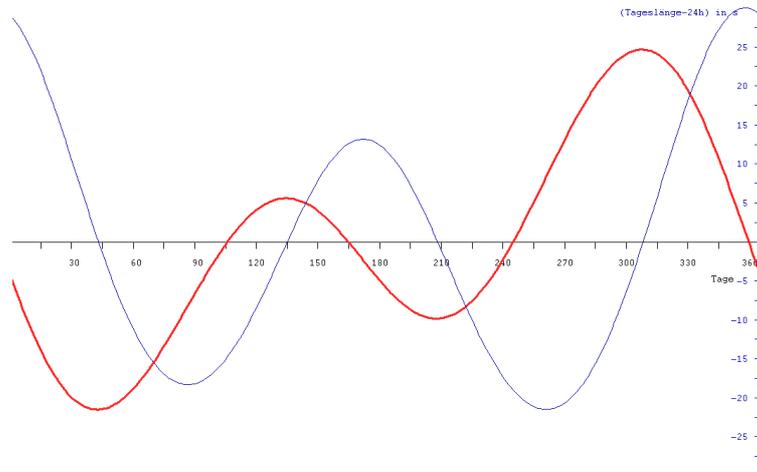


Abbildung 4: Tageslänge

Aus dieser Kurve kann man die wahre Tageslänge ablesen, die Zeit also, die zwischen zwei Mittagagen vergeht: Sie beträgt nur dann 24 h, wenn die Zeitgleichung ihren Wert nicht ändert; sie ist kleiner als 24 h, wenn die Zeitgleichung wächst, sonst größer als 24 h. Abbildung 4 zeigt die Abweichung der wahren Tageslänge von 24 h.

Wie kann man sich nun diese Schwankung erklären?

Eine häufig angebotene Erklärung für die Veränderung der Tageslänge ist der ungleichförmige Umlauf der Erde um die Sonne. Diese Erklärung enthält jedoch nur einen Teil der Wahrheit – und zudem den kleineren. Das kann man sich auch leicht klarmachen: Da sich die Erde einmal im Jahr besonders langsam und einmal besonders schnell bewegt, kann durch diese Ungleichförmigkeit nur ein *einmaliger* Wechsel zwischen Vor- und Nachgehen der Sonnenuhr hervorgerufen werden.

Der Antwort auf die Frage nähert man sich mit folgenden Überlegungen:

- Der jährliche Umlauf der Sonne verlangsamt ihre tägliche Bewegung. Der Sonnentag wird dadurch verlängert, und zwar umso mehr, je schneller die jährliche Bewegung ist.
- Eine Bewegung der Sonne parallel zur Achse der Himmelsdrehung (in Deklination also) und damit parallel zum Schattenstab hat keinen Einfluss auf die Anzeige der Sonnenuhr.
- Die Veränderung der Tageslänge wird also nur hervorgerufen durch die (azimutale) Bewegung der Sonne parallel zum Himmelsäquator.

Selbst bei gleichförmigem Umlauf aber wäre die azimutale Geschwindigkeit der Sonne nicht konstant:

- Zu Frühlings- und Herbstanfang bilden die Ekliptik und der Äquator den größten Winkel miteinander (Abb. 6, links); die azimutale Geschwindigkeit ist besonders klein.

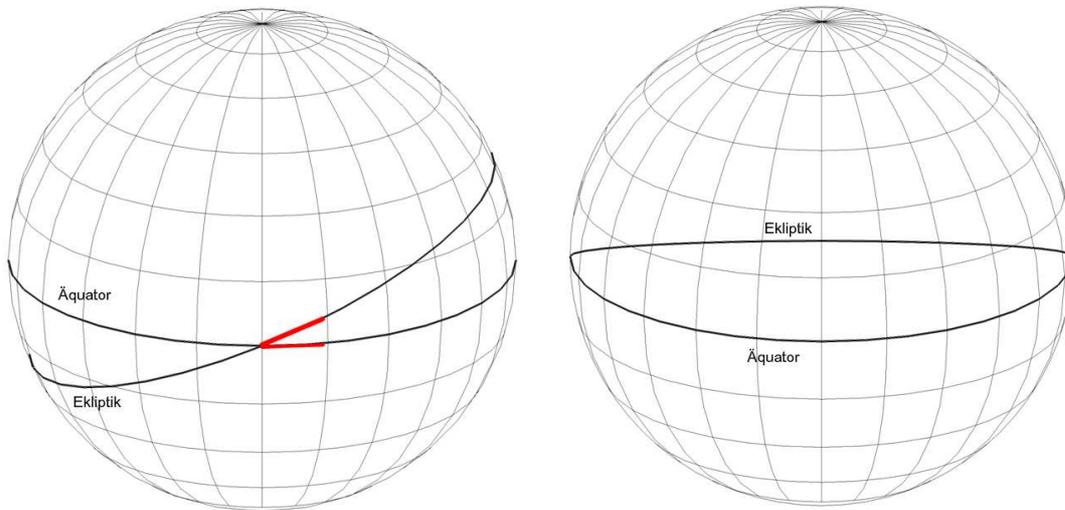


Abbildung 5: Äquator und Ekliptik in der Nähe des Frühlingsanfangs (links) und in der Nähe des Sommeranfangs (rechts)

- Zu Sommer- und Winteranfang jedoch sind Äquator und Ekliptik parallel zueinander (Abb. 5, rechts); die Bewegung der Sonne ist also azimutal. Wegen der größeren Nähe der Sonnenbahn zur Rotationsachse der Himmelskugel ist die azimutale Winkelgeschwindigkeit sogar größer als die der Sonne auf ihrer Bahn (s. u.). Zu diesen Zeitpunkten ist also die azimutale Geschwindigkeit besonders groß.

Allein die Neigung der Ekliptik verursacht also einen zweimaligen Wechsel zwischen Vor- und Nachgehen der Sonnenuhr! Bestimmt man diesen Einfluss der Neigung (z. B. grob an einem Globus), so ergibt sich Abbildung 6. Ein Vergleich mit der Zeitgleichung ergibt eine schon recht gute Übereinstimmung. Erst die genaue Untersuchung des Unterschiedes führt endlich auf einen ungleichmäßigen Umlauf: Abbildung 7 zeigt einen Wechsel zwischen zu schnellem und zu langsamen Gang der Sonnenuhr mit einjähriger Periode. Um den Jahreswechsel sind die Sonnentage besonders lang, die Sonne bewegt sich also schneller als im Mittel, während sie in der Jahresmitte besonders kurz sind, was auf eine langsamere Sonnenbewegung hinweist.

5 Quantitative Abschätzungen

5.1 Exzentrizität

Bei denselben Zeitpunkten, zu denen der Einfluss des ungleichförmigen Umlaufes maximal ist (Jahreswechsel und Jahresmitte), liegen auch die Maxima der Tageslängen: Ihre unterschiedlichen Höhen von 30 s und 13 s werden also jeweils durch die maximale bzw. minimale Umlaufgeschwindigkeit hervorgerufen. Die Maxima sind also im Mittel 21.5 s hoch. Der ungleichförmige Umlauf bewirkt eine Schwankung in der Tageslänge um $\pm 8.5s$. Berücksichtigt man die mittlere Verlängerung des Sonnentages gegenüber dem Sterntag um 236 s, dann verhalten sich die extremalen Winkelgeschwindigkeiten wie

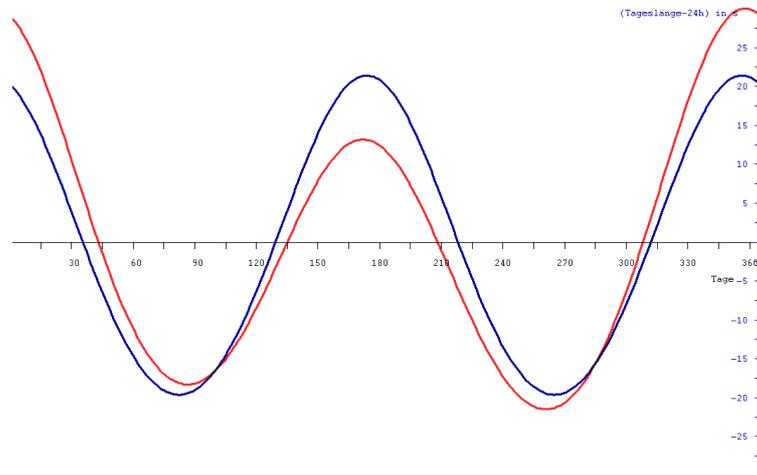


Abbildung 6: Einfluss der Schiefe der Ekliptik auf die Tageslänge

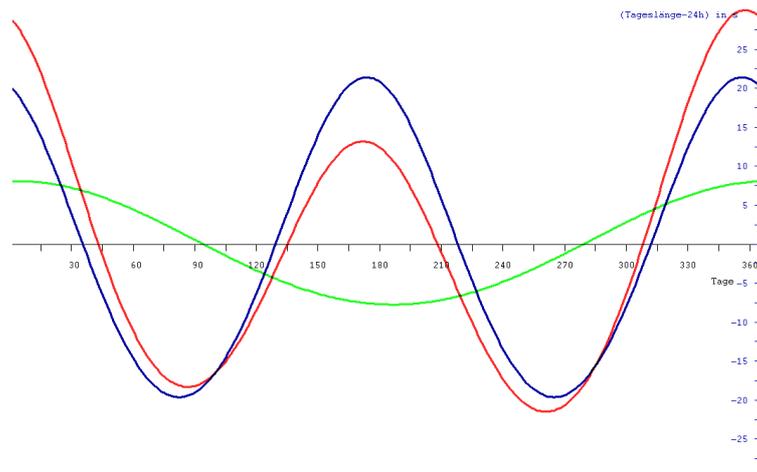


Abbildung 7: Einfluss der Ungleichförmigkeit des Sonnenumlaufs auf die Tageslänge

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{244.5s}{227.5s}$$

Nach dem 2. Kepler'schen Gesetz (Flächensatz, Drehimpulserhaltungssatz) verhalten sich diese Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadrate der entsprechenden Abstände Erde - Sonne:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2$$

Daraus erhält man die Exzentrizität e der Erdbahn:

$$e = \frac{\sqrt{\omega_1} - \sqrt{\omega_2}}{\sqrt{\omega_1} + \sqrt{\omega_2}} = \frac{\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} - 1}{\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} + 1} = 0.018$$

Dieser Wert stimmt recht gut mit dem Literaturwert (0.0167) überein.

5.2 Schiefe der Ekliptik

Die Neigung der Ekliptik gegen den Äquator kann leicht direkt aus der Sonnenhöhe zu Winteranfang (WA) und Sommeranfang (SA) bestimmt werden (siehe den vorangegangenen Aufsatz). Trotzdem soll sie hier aus dem Verlauf der Zeitgleichung abgeschätzt werden, da die Ableitung das Verständnis der Abbildung 7 erleichtert. Mit Hilfe der Abbildung 5 macht man sich den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\lambda}$ der Sonne und ihrer äquatorialen Komponente $\dot{\alpha}$ klar:

$$\begin{aligned} \text{SA, WA: } \quad \dot{\lambda}R &= v_\lambda = v_{\alpha_1} = \dot{\alpha}_1 R \cos \epsilon &\implies \quad \dot{\alpha}_1 &= \frac{\dot{\lambda}}{\cos \epsilon} \\ \text{FA, HA: } \quad \dot{\lambda} &= \frac{v_{\alpha_2}}{\cos \epsilon} = \frac{\dot{\alpha}_2 R}{\cos \epsilon} &\implies \quad \dot{\alpha}_2 &= \dot{\lambda} \cos \epsilon \end{aligned}$$

Der vollständige Zusammenhang ergibt sich aus der Beziehung $\tan \lambda = \tan \alpha \cos \epsilon$ durch Differenzieren:

$$\frac{\dot{\alpha}_1}{\dot{\alpha}_2} = \cos^2 \epsilon = \frac{236s + 21.5s}{236s - 21.5s} = 0.8337 \implies \epsilon = 24.1^\circ$$

6 Schlussbemerkungen

- Dass obige quantitative Abschätzungen zu relativ guten Ergebnissen führen, liegt an der gewissermaßen zufälligen Situation, dass Winteranfang und Periheldurchgang der Erde etwa gleichzeitig eintreten.
- Wir benutzen in diesem Aufsatz fast ausschließlich eine geozentrische Betrachtungsweise, da diese der unmittelbaren Anschauung viel eher entspricht und hier das Verständnis sehr erleichtert. Man versuche sich nur einmal den Einfluss der Ekliptikschiefe auf die Tageslänge in heliozentrischer Betrachtungsweise klarzumachen!

- Beobachtungsdaten, die den in Abb. 2 dargestellten entsprechen, können mit überraschender Genauigkeit mit einfachen selbstgebauten Sonnenuhren gewonnen werden. Vielleicht ist es trotzdem illusorisch, von einem vollständigen Satz solcher Daten auszugehen. Ersatzweise können die Daten der wahren Mittage aus fast jedem Taschenkalender gewonnen werden, indem man die Mitte zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang bestimmt (Schlosser o. J.). Natürlich ergibt sich daraus nicht die geographische Länge des interessierenden Ortes, sondern (meist) die von Kassel.

Literatur

- [1] Schlosser, W.: *Musterversuche für die Sekundarstufe I - vorläufige Version* (zu beziehen bei W. Schlosser, Astronomisches Institut der Ruhr-Universität Bochum)