

Die Mondentfernung selbst messen

Astronomie ist eine Mitmachwissenschaft. Manchmal trennen nur wenige Schritte reine Beobachtung von einer physikalischen Messung. Die Mondentfernung ist ein gutes Beispiel: Mit einfachen Hilfsmitteln können Amateurastronomen den Abstand des Erdtrabanten auf verschiedene Weisen selbst bestimmen. Anhand echter Beispiele bekommen diejenigen, die selbst nachmessen wollen, alles Nötige an die Hand.

Von Udo Backhaus

Für die räumliche Wahrnehmung benötigt unser Gehirn Informationen von beiden Augen, sonst schätzt es Entfernungen in der Tiefe komplett falsch ein. Die Funktionsweise ist schnell erklärt: Blickt man auf seinen ausgestreckten Daumen und schließt abwechselnd das linke und das rechte Auge, so scheint er vor dem Hintergrund hin und her zu springen. Je länger man den Arm macht, desto kleiner ist der Effekt. Diese scheinbare Verschiebung von Objekten vor dem Hintergrund – die Parallaxe – ist eine einfache Methode, um räumliche Abstände in der Tiefe zu bestimmen. Mit diesem Prinzip lassen sich auch Entfernungen von Himmelskörpern messen. Auch heute noch ist diese Methode die genaueste: der Satellit Gaia benutzt den gleichen Effekt, um die Entfernungen von mehr als einer Milliarde Sternen zu bestimmen.

Bereits im zweiten Jahrhundert vor Christus konnte der griechische Astronom Hipparch den Abstand zwischen Erde und Mond zu ungefähr siebzig Erdradien bestimmen. Dies gelang ihm anhand der Parallaxe des Mondes vor der Sonne während einer Sonnenfinsternis.

Die Parallaxe des Mondes mit modernen Mitteln zu messen, erfordert lediglich

eine System- oder Spiegelreflexkamera mit einem Objektiv kurzer Brennweite, ein gutes Stativ und etwas Kenntnis im Umgang mit Planetariums- und Bildbearbeitungsprogrammen. Die simpelste Methode ist, zwei Beobachter an weit entfernten Orten auf der Erde zu platzieren. Es bieten sich aber auch andere Methoden an, die man alleine durchführen kann, ohne weit reisen zu müssen. Auch diese liefern erstaunlich genaue Ergebnisse.

Auf einer Reise nach Namibia im Jahr 2016 bot sich mir die Gelegenheit, drei Verfahren zu erproben und die ermittelten Werte zu vergleichen. Zwei Methoden nutzen den Parallaxeneffekt; die dritte arbeitet mit der scheinbaren Größenänderung des Mondes zwischen Aufgang und seinem höchsten Stand. Im Folgenden stelle ich diese Messungen anhand meiner Erfahrungen vor und erkläre sie detailliert.

Methode 1: Mondparallaxe von zwei Orten aus

Visieren zwei Beobachter an weit voneinander entfernten Orten den Mond gleichzeitig an, sehen sie ihn in Bezug zum Sternhintergrund an unterschiedlichen Positionen. Der Erdtrabant erscheint also

um einen Parallaxenwinkel p verschoben (siehe Bilder Seite 80). Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Verbindungslinie zwischen den Beobachtern senkrecht auf der Strecke vom Erdmittelpunkt zum Mond steht, dann lässt sich die Länge dieser Strecke d über die Entfernung Δ zwischen den beiden Beobachtern und die Parallaxe p annähern:

$$\tan \frac{p}{2} = \frac{\Delta/2}{d}$$

Stellt man dies nach dem gesuchten Abstand d um, erhält man

$$d = \frac{\Delta}{2 \cdot \tan p/2} \approx \frac{\Delta \cdot 180^\circ}{p \cdot \pi}$$

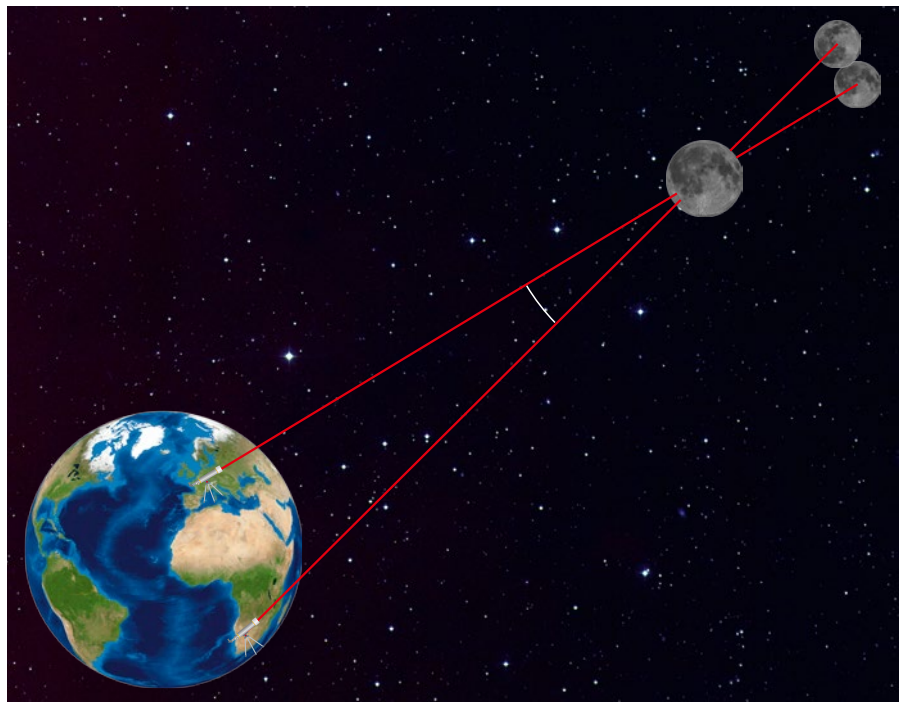
Es sei angemerkt, dass die Näherung letztlich nur für kleine Winkel gilt – was hier der Fall ist – und die Parallaxe p in Grad angegeben wird. Die Entfernung zwischen den beiden Beobachtern entspricht außerdem nicht der entlang der Erdoberfläche gemessenen Distanz, sondern dem kürzesten, linearen Abstand durch den Erdkörper.

■ **Messung der Mondposition:** Um den Parallaxenwinkel zu messen, bietet es sich an, zunächst die Stellung des Mon-

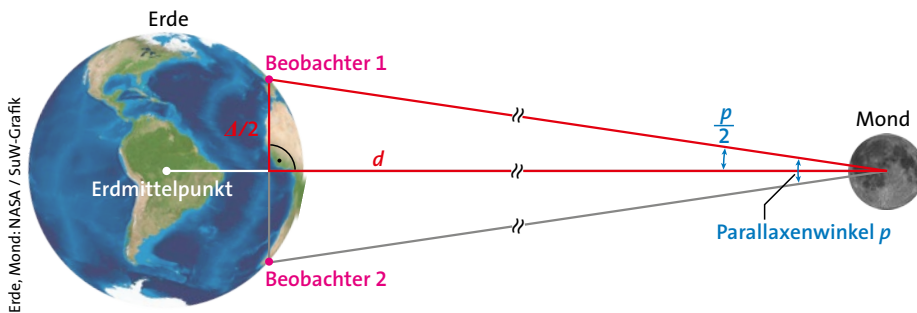
Nah am Horizont wirkt der Mond oft riesig. Dieser Effekt heißt Mondillusion. In Wirklichkeit ist der Beobachter in dieser Situation sogar etwas weiter vom Mond entfernt als wenn der Erdtrabant hoch am Himmel steht. Deshalb ist die Mondscheibe objektiv gesehen in Horizontnähe am kleinsten! Die Mondentfernung kann man mit einfachen Mitteln selbst nachmessen. Eine raffinierte Methode hierfür basiert auf genau dieser Größenänderung der Mondscheibe während einer Nacht.

Zwei verschiedene Beobachter sehen den Mond um einen kleinen Winkel, die Parallaxe, am Sternhimmel versetzt. Mit der Parallaxenmethode lässt sich die Entfernung des Mondes von zwei weit entfernten Orten auf der Erde aus bestimmen. Zusammen mit der bekannten Entfernung der beiden Beobachter voneinander benötigt man nur noch einfache Trigonometrie, um die Mondentfernung zu finden.

Die Geometrie hinter der Parallaxenmethode ist einfach. Zwei Beobachter sehen den Mond um einen Winkel p versetzt. Ist die Entfernung Δ zwischen ihnen bekannt, lässt sich die Mondentfernung d in erster Näherung zu $d = \Delta/p$ bestimmen – dazu benutzt man die Eigenschaften des rot eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks.



Erde, Mond: NASA; Hintergrund: DSS2 / STScI / SuW-Grafik



Erde, Mond: NASA / SuW-Grafik

des relativ zu benachbarten Sternen zu bestimmen. Am einfachsten geht das, indem man den Mond von beiden Beobachtungsorten aus fotografiert und die Bilder anschließend mit einer Sternkarte oder einem astronomischen Programm vergleicht. Für meine Reise nach Namibia hatte ich mich hierzu mit Freunden in Bochum verabredet. In der geplanten Nacht vom 22. auf den 23. Mai 2016 und auch in den folgenden Nächten war der Himmel über dem Ruhrgebiet leider mit Wolken verhangen. Am 29. Mai gelang doch noch eine Messung, bei der Alfred Knülle-Wenzel in Bochum und ich in Namibia den Mond zwischen 01:55 und 02:20 Uhr Universal Time (UT) im Abstand von fünf Minuten fotografierten, um nicht an kurzfristig vorüberziehenden Wolken zu scheitern. Dabei wählten wir eine kurze Brennweite von etwa 35 Millimetern, um auf den Fotos in der weiteren Umgebung des Mondes Fixsterne finden und identifizieren zu können.

Wegen des enormen Helligkeitsunterschieds ist es fast unmöglich, den Mond scharf umrissen und Fixsterne gleichzei-

tig auf einem Bild abzulichten. Wir konnten das Problem lösen, indem wir jeweils unmittelbar nacheinander zwei Fotos mit feststehender Kamera und unveränderter Brennweite aufnahmen: eines mit sehr kurzer Belichtungszeit, um den Mond scharf abzubilden, und ein zweites, länger belichtetes, um die Umgebungssterne sichtbar zu machen. Dabei ist es wichtig, dass beide Aufnahmen möglichst schnell aufeinander folgen und dass sich die Orientierung der Kamera währenddessen nicht ändert. Beides gelingt am besten, wenn man die Kamera von einem Laptop aus ansteuert.

Aus den beiden Digitalfotos mit unterschiedlichen Belichtungszeiten haben wir an beiden Standorten durch Differenzbildung mit einem Bildbearbeitungsprogramm jeweils ein einziges Kompositbild gewonnen, das sowohl den Mond als auch die Umgebungssterne scharf darstellt (siehe Bild Seite 81 oben). Hierfür verwendeten wir die Public-Domain-Software »ImageJ«.

Mit dem Astronomieprogramm »Guide« haben wir anschließend in den beiden

Differenzbildern aus Bochum und Namibia Sterne in der Umgebung des Mondes identifiziert. An diesen konnten wir uns nun orientieren, um die Bilder so zu skalieren, zu drehen und zu verschieben, dass diese Sterne auf beiden Bildern dieselbe Position haben. Fügt man dann diese Bilder zu einem Kombinationsbild zusammen, lässt sich die parallaktische Verschiebung des Mondes sofort erkennen (siehe mittleres Bild Seite 81).

Um die genauen Positionen von Mond und Sternen zu gewinnen, benutzten wir allerdings die ursprünglich aufgenommenen Bilder. Es ist reizvoll, aber nicht ganz einfach, die Stellungen des Erdtrabanten durch eine Zuordnung von Pixel- zu Winkelabstand in den Aufnahmen selbst zu vermessen und zu berechnen. Wir benutzen stattdessen das im Netz verfügbare Astrometrie-Programm »Astrometry.net« zur Auswertung der Bilder, das erstaunlich viele Sterne identifizierte. In den hierbei erzeugten Dateien ließen wir uns dann mit Hilfe des Programms »AstrolmageJ« die jeweiligen Himmelskoordinaten des Mondes anzeigen. Dies ergab folgende Werte für die Beobachtungen in Namibia und Bochum für Rektaszension α und Deklination δ :

$$\alpha_N = 334,73^\circ, \delta_N = -9,02^\circ;$$

$$\alpha_B = 334,63^\circ, \delta_B = -10,14^\circ.$$

■ **Ein wenig Geometrie:** Den Parallaxenwinkel p zwischen diesen beiden Positionen auf der Himmelskugel ermittelten

wir daraus mit dem Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos p = \cos \delta_N \cos \delta_B + \sin \delta_N \sin \delta_B \cos (\alpha_N - \alpha_B).$$

Durch Einsetzen erhalten wir einen Wert für die Parallaxe von $p = 1,12$ Grad.

Nun fehlte uns nur noch der Abstand zwischen den beiden Beobachtern, den wir eingangs bereits mit Δ bezeichnet haben. Hierfür berechneten wir zunächst die auf den Erdmittelpunkt bezogenen rechtwinkligen (kartesischen) Koordinaten x , y und z für beide Orte über die Transformationsgleichungen der Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= R_E \cos \lambda \cos \varphi \\ y &= R_E \sin \lambda \cos \varphi \\ z &= R_E \sin \varphi \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet R_E den Erdradius von 6378 Kilometern. Die Koordinaten λ und φ sind die geografische Länge λ und Breite φ der beiden Beobachtungsorte in Namibia und Bochum:

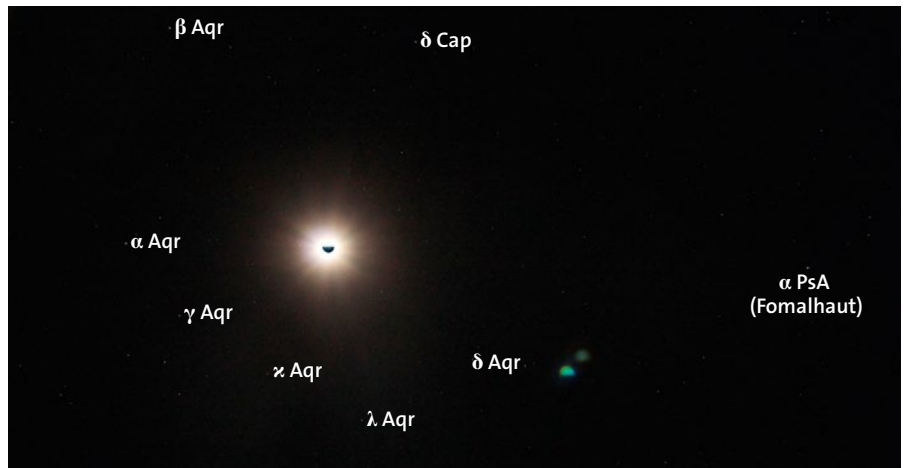
$$\begin{aligned} \lambda_N &= 16,33^\circ; \varphi_N = -23,14^\circ \\ \lambda_B &= 7,22^\circ; \varphi_B = 51,48^\circ \end{aligned}$$

Der gesuchte Abstand Δ zwischen den Orten, an denen in Namibia und Bochum der Mond gleichzeitig abgelichtet wurde, ließ sich dann mit dem Satz des Pythagoras ermitteln:

$$\Delta = \sqrt{(x_N - x_B)^2 + (y_N - y_B)^2 + (z_N - z_B)^2}.$$

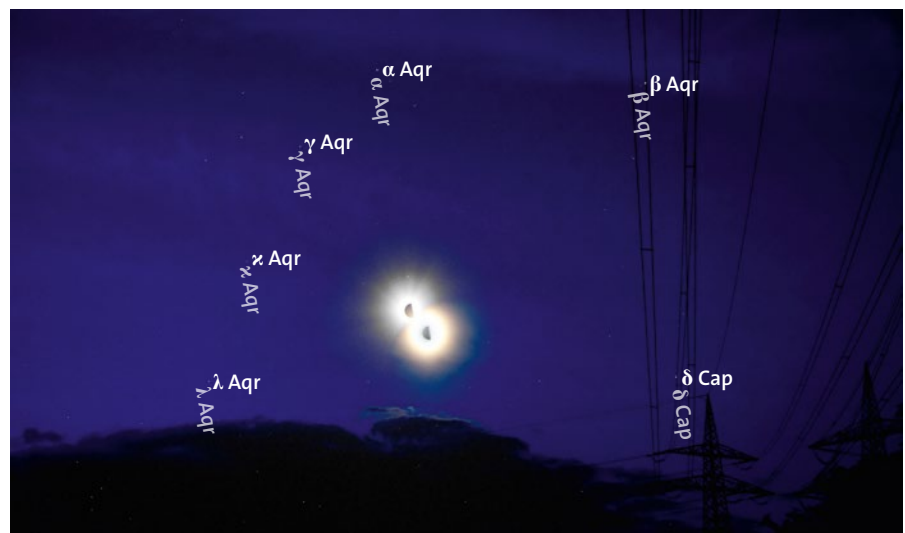
Setzt man die Zahlen ein, liefert dies einen Wert von $\Delta = 1,22 R_E$. Zusammen mit dem Parallaxenwinkel ergibt sich daraus die Entfernung des Mondes zu 62,4 Erdradien. Verglichen mit dem Literaturwert in dieser Nacht ($59,2 R_E$) fällt unser Ergebnis also um etwa fünf Prozent zu groß aus.

Allerdings floss in unsere Formel für die Bestimmung des Mondabstands die Annahme ein, dass die Verbindungslinie zwischen den Beobachtern senkrecht auf der Strecke vom Erdmittelpunkt zum Mond steht. Tatsächlich kommt es auf den projizierten Abstand zwischen den Beobachtungsorten an, der zum Zeitpunkt der Aufnahmen nur $\Delta_{\perp} = 1,12 R_E$ betrug (siehe Bild rechts unten). Damit ergibt sich der Mondabstand zu $57,3 R_E$. Die verbleibende Abweichung vom korrekten Wert beruht darauf, dass die auf den Fotos gemessenen Mondpositionen einen



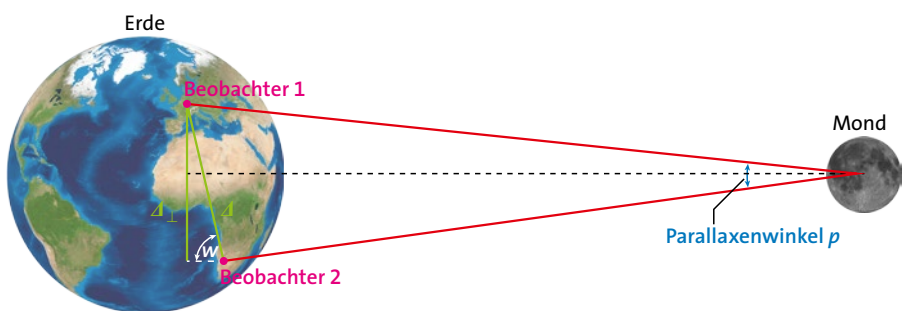
Udo Backhaus / SuW-Grafik

Mond und Sterne gleichermaßen scharfgestellt: Zwei direkt aufeinanderfolgende Aufnahmen mit unterschiedlich langen Belichtungszeiten können durch Differenzbildung zu einem einzigen Bild kombiniert werden. Dieses Kompositbild zeigt dann sowohl den Mond als auch die Sterne deutlich.



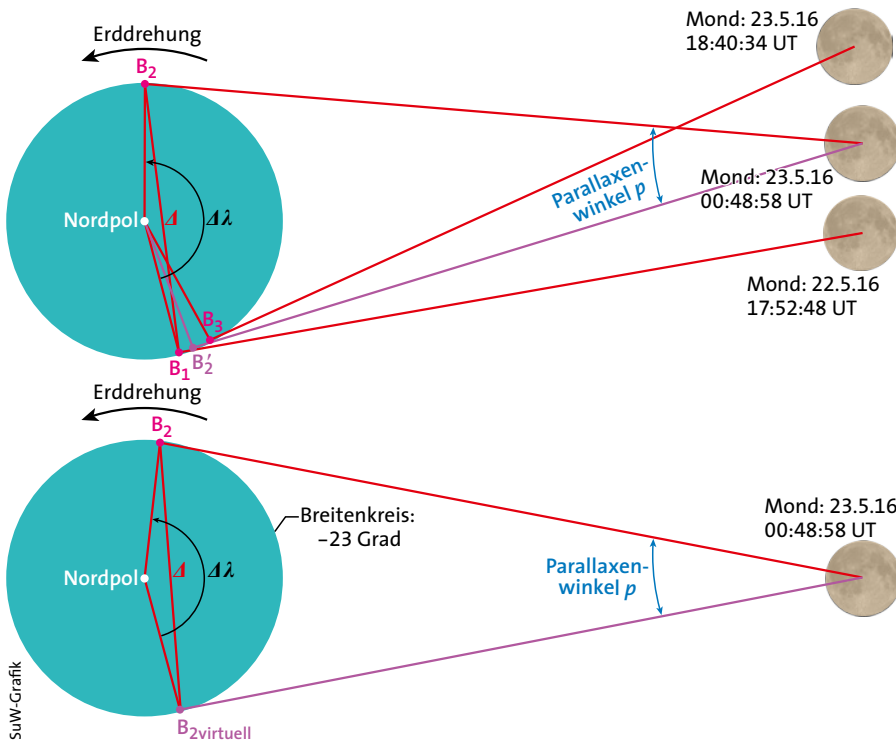
Udo Backhaus und Alfred Knülle-Wenzel / SuW-Grafik

Die Mondparallaxe wird sichtbar: Legt man zwei gleichzeitig an weit entfernten Orten entstandene Aufnahmen anhand der sichtbaren Umgebungssterne übereinander, verrät sie sich. Die übereinandergelegten Bilder sind um etwa 90 Grad verdreht, weil die Beobachter den gleichen Himmelsabschnitt von weit entfernten Orten – Bochum und Namibia – gesehen haben. Deshalb sind sich die Beobachter nicht einig, wo »oben« wäre.



Erde, Mond: NASA / SuW-Grafik

Wenn das Dreieck nicht gleichschenkelig ist, also der lineare Abstand Δ der beiden Beobachter nicht senkrecht zur Strecke Erde–Mond liegt, muss der projizierte Abstand Δ_{\perp} benutzt werden. In unserem Fall betrug er $1,12 R_E$.



Zwei Bezugssysteme werden benötigt, um die Eigenbewegung des Mondes zu isolieren.

Oben: Das Prinzip der täglichen Parallaxe im üblichen System, in dem sich die Erde in 24 Stunden einmal um die eigene Achse dreht, während auch der Mond weiter um die Erde kreist. Die Neigung der Erdachse zur Mondbahnebene wird vernachlässigt.

Unten: Die tägliche Parallaxe im »Mondtag-System«, in dem die Rotation des Mondes um die Erde eingefroren wird. Hier ändert sich die Stellung des Mondes nicht. Stattdessen dreht sich der Fixsternhimmel in 27,3 Tagen einmal im Uhrzeigersinn. Die Position des virtuellen Beobachters und sein Blickwinkel zum Mond sind jeweils in violett dargestellt.

Fehler von etwa 0,1 Grad aufweisen. Trotzdem lässt sich festhalten, dass die Parallaxenmessung einen recht genauen Wert liefert. Wir schreiben das Ergebnis als $d = 57,3 R_E$ und schätzen die Messunsicherheit auf etwa drei Prozent.

Methode 2: Die tägliche Mondparallaxe

In der Regel ist es schwierig, das oben beschriebene Verfahren mit gleichzeitigen Beobachtungen von hinreichend weit entfernten Standorten durchzuführen. Außerdem kann einem immer das Wetter an einem der Beobachtungsstandorte einen Strich durch die Rechnung machen – so, wie in unserem Fall, in der ursprünglich für die Parallaxenmessung geplanten Nacht vom 22. auf den 23. Mai 2016. Da die Bedingungen in Namibia in dieser Nacht aber gut waren, nutzte ich diese Gelegenheit, um zwei andere Methoden zur Bestimmung der Entfernung des Mondes zu erproben. Beide bieten den Vorteil, dass sie ohne die Mitwirkung eines zweiten Beobachters auskommen.

Eine Möglichkeit bietet die Messung der täglichen Parallaxe: Dabei nutzen wir die Erdrotation während einer Nacht, um uns selbst an einen weit entfernten Ort transportieren zu lassen. Zwei Aufnahmen des Mondes, eine am frühen Abend und eine in den Morgenstunden, zeigen ihn dann in unterschiedlichen Positionen relativ zum Sternhintergrund – ähnlich wie bei der ersten Methode mit zwei gleich-

zeitigen Beobachtungen von unterschiedlichen Standorten aus. Nun kommt aber erschwerend hinzu, dass sich der Mond in der Zeit zwischen den Aufnahmen auf seiner Bahn um die Erde weiterbewegt. Der Unterschied zwischen den beiden beobachteten Positionen am Abend (α_1, δ_1) und am folgenden Morgen (α_2, δ_2) ist deshalb eine Überlagerung aus Eigenbewegung und Parallaxe (siehe Grafik oben).

Die Eigenbewegung des Mondes lässt sich durch Interpolation abtrennen: Hierfür messen wir die Position des Mondes noch ein drittes Mal, nämlich einen Mondtag nach der ersten Beobachtung, also etwa 24 Stunden und 50 Minuten später: Dann ist die Konstellation von Erdmittelpunkt, Mond und Beobachter die gleiche wie bei der ersten Messung. Trotzdem steht der Trabant relativ zum Fixsternhimmel in einer anderen Position, was nun aber allein auf seine Eigenbewegung zurückzuführen ist. Setzen wir diese Koordinatenänderung ins Verhältnis zur vergangenen Zeit, können wir für jeden Zeitpunkt zwischen den Beobachtungen parallaxenfreie Mondpositionen berechnen.

■ **Die Eigenbewegung des Mondes stört:** Ich möchte die Methode genauer am Beispiel meiner eigenen Messungen in Namibia erläutern: Mit denselben Kameraeinstellungen wie im ersten Abschnitt fotografierte ich den Mond zunächst am Abend des 22. Mai 2016 zur Zeit $t_1 = 17:52:48$ UT, dann am folgenden Mor-

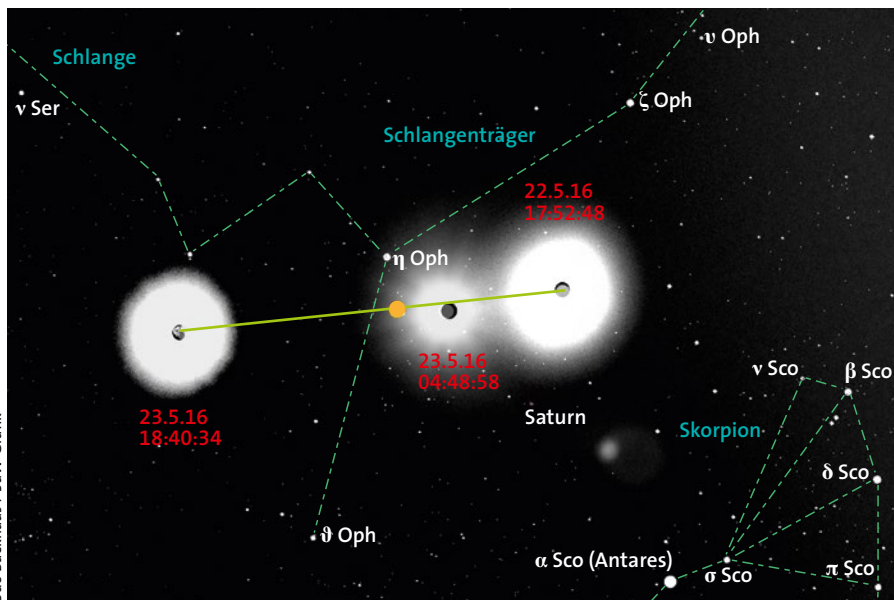
gen um $t_2 = 04:48:58$ UT. Die dritte Aufnahme erfolgte schließlich einen Mondtag nach der ersten, am Abend des 23. Mai um $t_3 = 18:40:34$ UT. Nach Auswertung analog zu oben lieferten diese Aufnahmen folgende Positionen des Mondes in Form von Rektaszension α und Deklination δ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 251,55^\circ; \delta_1 = -16,85^\circ, \\ \alpha_2 &= 255,46^\circ; \delta_2 = -17,52^\circ, \\ \alpha_3 &= 264,77^\circ; \delta_3 = -17,96^\circ. \end{aligned}$$

Um nun die Eigenbewegung des Mondes zu isolieren, nehmen wir zur Vereinfachung an, dass sich dessen Rektaszension und Deklination innerhalb eines Mondtages gleichförmig ändern. Die parallaxenfreien Koordinaten zu einem Zeitpunkt t ergeben sich dann durch lineare Interpolation zwischen den Positionen zu den Zeiten t_1 und t_3 :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \alpha_1 + \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{t_3 - t_1} \cdot (t - t_1) \\ \delta'(t) &= \delta_1 + \frac{\delta_3 - \delta_1}{t_3 - t_1} \cdot (t - t_1). \end{aligned}$$

Diese Mondstellungen könnte ein virtueller Beobachter gemessen haben, dessen Standort *im Raum* ab der ersten Aufnahme stets gleich blieb, der also nicht an der Erdrotation teilnahm. Eine Änderung der Position des Mondes erfolgte aus seiner Sicht nur über dessen eigene Bahnbewegung um die Erde. Die entsprechenden Koordinaten beinhalten also keine Parallaxe.



Eine Überlagerung von drei Aufnahmen innerhalb von knapp 25 Stunden zeigt den Mond in unterschiedlichen Positionen zwischen dem 22. und dem 23. Mai 2016. Der Sprung von der ersten (rechts) zur dritten Beobachtung einen Mondtag später (links) ist allein auf die Eigenbewegung des Mondes zurückzuführen. Die zweite Aufnahme (Mitte) wird zusätzlich von der durch die Erddrehung hervorgerufenen Parallaxe überlagert. Orange eingezeichnet ist die zugehörige »parallaxenfreie« Position, welche durch die Interpolation der Mondbewegung zwischen der ersten und dritten Aufnahme berechnet wurde. Der Überlagerung wurde zusätzlich das entsprechende Sternfeld aus dem Planetariumsprogramm Sternfild unterlegt.

Setzen wir nun t_2 für t ein, erhalten wir die parallaxenfreie Stellung des Mondes zum Zeitpunkt der zweiten Beobachtung, wie sie dieser fiktive Beobachter gemessen hätte:

$$\alpha'_2 = 257,38^\circ; \delta'_2 = -17,34^\circ.$$

Überlagert man nun alle Bilder, so zeigen sich die unterschiedlichen Stellungen des Mondes zu den jeweiligen Aufnahmezeiten (siehe Bild oben). Der in Orange eingezeichnete Punkt kennzeichnet die für den virtuellen Beobachter berechnete parallaxenfreie Mondposition zum Zeitpunkt t_2 . Die tatsächlich beobachtete Stellung ist durch die Parallaxe deutlich nach Westen verschoben, weil wir uns nach der ersten Messung mit der Erddrotation weit nach Osten bewegt haben. Aus dem Abstand der Positionen des Mondes (α_2, δ_2) und (α'_2, δ'_2) ergibt sich ein Parallaxenwinkel von $p = 1,8$ Grad.

Um die Mondentfernung bestimmen zu können, fehlt uns noch die Distanz Δ zwischen den beiden Beobachtungsstandorten. In diesem Fall ist der Abstand die Distanz zwischen dem beschriebenen virtuellen Beobachter und dem echten Beobachter zum Zeitpunkt t_2 . Betrachten wir also erneut den virtuellen Beobachter: Da er an der Erddrotation nicht teilnahm, bewegte er sich bezüglich der Koordinaten des Ortes der ersten Aufnahme in Namibia (λ_N, φ_N) mit zunehmender Zeit nach Westen. Dabei überstrich er auf dem zugehörigen Breitenkreis pro Stunde 15 Grad (360 Grad in 24 Stunden). Seine geografische Länge zum Zeitpunkt der morgendlichen Aufnahme t_2 kann also genau wie

beim Mond auch durch Interpolation berechnet werden:

$$\lambda'_2 = \lambda_N - \frac{15^\circ}{1h} \cdot (t_2 - t_1) = -147,71^\circ.$$

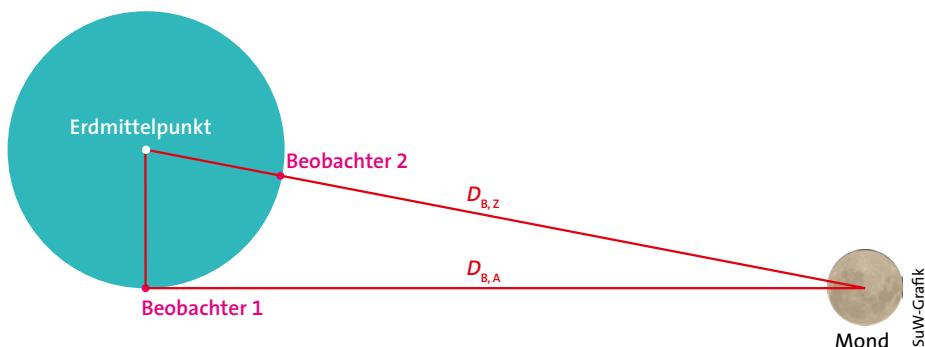
Hiermit und mit den geografischen Koordinaten des Beobachtungsorts lässt sich wie in der ersten Methode beschrieben die lineare Distanz zwischen den Beobachtungsorten zu $\Delta \approx 1,82 R_E$ berechnen. Mit dem oben ermittelten Parallaxenwinkel von 1,8 Grad führt das zu einer Mondentfernung von rund 57 Erdradien.

Es ist also gelungen, den Abstand des Mondes von einem festen Standort aus ohne Beobachtungspartner zu messen. Der ermittelte Parallaxenwinkel fällt allerdings gegenüber dem theoretischen Wert von 1,65 Grad um zehn Prozent zu groß aus. Diese Abweichung beruht nur zu einem kleinen Teil auf den hier zu Grun-

de gelegten Vereinfachungen: Als ich die Rechenschritte mit den wahren statt den gemessenen Mondpositionen überprüfte, zeigte sich ein nahezu perfektes Ergebnis. Anscheinend wurden also die Koordinaten des Mondes auf den Aufnahmen nicht genau genug bestimmt. Hierfür spricht auch, dass der Parallaxenfehler in der Größenordnung der Unsicherheit der einzelnen Positionsmessungen liegt. Entsprechend unterschätzt unser Ergebnis die wahre Mondentfernung in dieser Nacht (62,9 Erdradien) um rund zehn Prozent.

Methode 3: Scheinbare Größenänderung des Mondes

Der aufgehende Vollmond erscheint im Vergleich zum hoch stehenden Mond riesig. Dabei sitzen wir jedoch einer Täuschung unserer Wahrnehmung auf – der Mondillusion. Es trifft nämlich das Gegen-



Zwischen Aufgang und Kulmination des Mondes nähert sich der Beobachter auf Grund der Erddrehung dem Trabanten an, wodurch dieser am Himmel größer wird. Im Falle eines Zenitdurchgangs, der hier dargestellt ist, entsteht durch den Mond, den Erdmittelpunkt und die beiden Beobachtungspositionen ein rechtwinkliges Dreieck, das ermöglicht, die Mondentfernung zu berechnen. Mit einfacher Trigonometrie lässt sich so die geozentrische Entfernung durch das Verhältnis der topozentrischen Distanzen ausdrücken.

Der Zusammenhang zwischen Winkeldurchmesser und Entfernung

Leider hat man fast nie das Glück, sich an einem Ort zu befinden, an dem der Mond genau durch den Zenit geht; außerdem ist es wohl unmöglich, unseren Erdbegleiter genau im Moment des Aufgangs abzulichten, also bei einer Höhe von null Grad über dem Horizont. Deshalb ist das Dreieck zwischen Beobachter, Mond und Erdmittelpunkt in der Regel nicht rechtwinklig. Die Methode, welche die Änderung des Monddurchmessers benutzt, ist dann in der im Haupttext beschriebenen vereinfachten Form nicht anwendbar.

Über einen allgemeineren Zusammenhang lassen sich aber auch die Mondhöhen noch berücksichtigen. Die geozentrische Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt d hängt über den Kosinussatz des Dreiecks Erdmittelpunkt–Beobachter–Mond (siehe Grafik unten) mit der Entfernung des Beobachters zum Mond D_B zusammen:

$$d^2 = D_B^2 + R_E^2 - 2D_B R_E \cos(90^\circ + h),$$

dabei ist h die beobachtete Höhe des Mondes über dem Horizont.

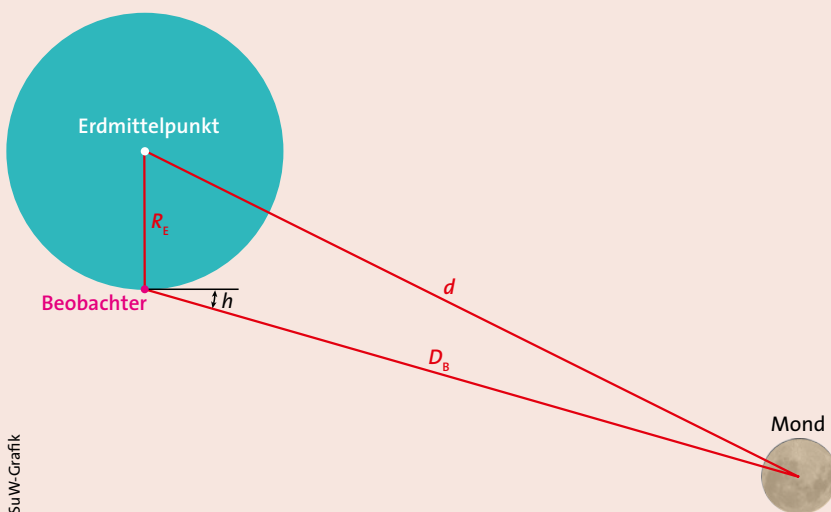
Die Gleichung ist in dieser Form nicht lösbar, weil sie zwei unbekannte Entfernungen enthält. Misst man jedoch in einer Nacht zweimal im Abstand mehrerer Stunden, kann der geozentrische Abstand des Mondes während dieses Zeitraums als konstant angenommen werden. Man erhält dann zwei Werte für die Mondhöhen (h_1 und h_2), sowie das Verhältnis η der Winkelgrößen des Mondes. Setzt man schließlich die rechte Seite der obigen Formel für die beiden Messungen gleich, erhält man wegen der Beziehung $D_{B,1} = \eta D_{B,2}$ und $\cos(90^\circ + h) = -\sin(h)$:

$$D_{B,2}^2 + 2D_{B,2} R_E \sin h_2 = \eta^2 D_{B,2}^2 + 2\eta D_{B,2} R_E \sin h_1.$$

Durch Auflösen nach $D_{B,2}$ ergibt sich

$$D_{B,2} = 2R_E \frac{\sin h_2 - \eta \sin h_1}{\eta^2 - 1}.$$

Nun lässt sich also $D_{B,2}$ berechnen, und dadurch dann mit obiger Gleichung auch der gesuchte Abstand d vom Erdmittelpunkt zum Mond.



Geht der Mond nicht durch den Zenit oder beobachtet man ihn nicht genau beim Aufgang am Horizont, ist das rote Dreieck aus Erdmittelpunkt, Beobachtungspunkt bei Aufgang und Mond nicht rechtwinklig. In diesem Fall muss der Kosinussatz zum Einsatz kommen, um die Mondentfernung berechnen zu können.

teil zu: Zwischen Aufgang und dem höchsten Punkt des Erdtrabanten am Himmel, seiner Kulmination, bewegt sich der Beobachter auf Grund der Erddrehung auf den Mond zu! Im Extremfall eines Zenitdurchgangs beträgt die Entfernungsänderung für Beobachtungsorte nahe am Äquator nahezu einen Erdradius. Bei einem Abstand von etwa 60 Erdradien würde sich dabei der Winkeldurchmesser um $1/60$ vergrößern. Aber lässt sich dieser Effekt überhaupt unter realen Bedingungen messen und daraus die Entfernung zuverlässig ableiten?

Der Beobachtungsort bei Mondaufgang, der Erdmittelpunkt und der Mond selbst bilden im Fall eines Zenitdurchgangs ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Grafik Seite 83 unten). Für die beiden Entfernungen zwischen Beobachter und Mond bei Aufgang und im Zenit, $D_{B,A}$ und $D_{B,Z}$, lässt sich mit dem Satz des Pythagoras herleiten:

$$\frac{D_{B,A}^2}{D_{B,Z}^2} = \frac{d^2 - R_E^2}{(d - R_E)^2} = \frac{d + R_E}{d - R_E}.$$

Dabei ist d wie bei den anderen Methoden der gesuchte Abstand des Mondes zum Erdmittelpunkt. Die scheinbare Größe des Mondes, also der Radius r , ändert sich umgekehrt proportional zu seiner Entfernung. Deshalb gilt für das Verhältnis der Durchmesser bei Zenit und Mondaufgang:

$$\frac{r_Z}{r_A} = \frac{D_{B,A}}{D_{B,Z}} = \eta.$$

Durch Einsetzen in obige Formel und kurze Umformung lässt sich die geozentrische Entfernung des Mondes auf das Verhältnis der gemessenen Winkeldurchmesser η zurückführen:

$$\frac{d}{R_E} = \frac{\eta^2 + 1}{\eta^2 - 1}.$$

In meiner ersten Nacht in Namibia kulminierte der fast volle Mond nahe beim Zenit – ideal für den Versuch, seine Größenänderung zu messen.

■ **Größenänderung des Mondes im Selbstversuch:** Ich fotografierte den Erdtrabanten beim Aufgang um 18:32 Uhr UT und kurz vor seinem Höchststand um 23:09 Uhr UT. Dabei benutzte ich eine feststehende Kamera mit einem Spektiv mit einer effektiven Brennweite von 800 Millimetern. Die mit meinem Pendelquadranten gemessenen Mondhöhen während der Aufnahmen betragen $h_A = 8$ Grad und $h_Z = 80$ Grad.



Es fällt sehr schwer, auf den einzelnen Fotos einen Größenunterschied zu erkennen. Deshalb habe ich beide Bilder überlagert, nachdem ich das Bild bei Mondaufgang vertikal leicht strecken musste, um die Abplattung durch die atmosphärische Lichtbrechung auszugleichen. Das Differenzbild zeigt dann deutlich, dass der Mond im Zenit etwas größer ist als kurz nach dem Aufgang (siehe Bild oben).

Ich habe die Pixelradien des Mondes zu $r_A = 813$ und $r_Z = 824$ Pixeln vermessen. Das ergibt einen Mondabstand von 74,4 Erdradien. Verglichen mit der wahren Entfernung in jener Nacht von 62,9 Erdradien ist dieser Wert um fast 20 Prozent zu groß! Der Grund hierfür ist, dass ich den Mond weder direkt am Horizont noch genau im Zenit fotografierte. Berücksichtigt man auch die Höhen des Mondes über dem Horizont h_A und h_Z (siehe Kasten links), welche über den Kosinussatz in das nicht mehr rechtwinklige Dreieck eingehen, ergibt sich eine Entfernung von 62,9 Erdradien – ein perfekter Wert.

Dabei hatte ich auch etwas Glück: Das Ergebnis hängt empfindlich von den gemessenen Mondradien ab, und diese lassen sich höchstens auf ein Pixel genau bestimmen. Schon bei einem Radius von 825 statt 824 Pixeln in der Kulmination hätte sich eine Mondentfernung von 57,7 Erdradien ergeben, was rund zehn Prozent unter dem wahren Wert liegt.

Das Erleben steht im Vordergrund

Auch dank der optimalen Bedingungen ist es mir also gelungen, die Mondentfernung innerhalb von 25 Stunden mit drei unterschiedlichen Verfahren zu bestimmen. Die beiden Methoden zur Beobachtung der Parallaxe führen zu guten Ergebnissen, während die Größenänderung des Mondes besonders wegen der grundlegend anderen Idee interessant ist. Alle drei Methoden eint aber der verhältnismäßig geringe Aufwand, und bei allen dreien sollte das aktive Erleben unseres Erdbegleiters und seiner Bewegung Vorrang haben. Die tägliche Parallaxe des Mondes und seine nächtliche Größenänderung lassen sich auch in Deutschland messen, wenn der Mond lange über dem Horizont zu sehen ist und eine möglichst große Höhe erreicht.

Ich selbst erhielt die Anregung dazu vor langer Zeit durch den im Jahr 1962 erschienenen und weiterhin lesenswerten Aufsatz »Wie weit ist der Mond entfernt?« von Martin Wagenschein. Der Didaktiker warnt, dass »eine allzu ausschließliche Bemühung um Genauigkeit das Verständnis des Wesentlichen einer Beobachtung gefährden oder vergessen machen kann«.

Ich hoffe, dieser Gefahr entgangen zu sein und das Wesentliche der drei Verfahren so beschrieben zu haben, dass die Leser angeregt werden, die Messungen selbst zu wiederholen.

Die Größenänderung des Mondes während einer Nacht wird im Vergleich zweier Aufnahmen klar sichtbar. Das hier gezeigte Differenzbild zeigt den Größenunterschied als hellen Ring. Die erste Aufnahme ist kurz nach Mondaufgang entstanden, die zweite nahe des Zenits. Da der hoch stehende Mond dem Beobachter etwas näher ist als beim Aufgang, ist er dort minimal größer.



UDO BACKHAUS war als Professor für Physik beziehungsweise Didaktik der Physik an den Universitäten in Koblenz und Essen in der Ausbildung von Physiklehrern tätig. Einer seiner Arbeitsschwerpunkte war die Didaktik der Astronomie. Er koordinierte weltweite Projekte zum Internationalen Astronomischen Jahr 2009 und zu den Venusdurchgängen 2004 und 2012. Zurzeit bereitet er ein Projekt zur Beobachtung und Auswertung des Merkurtransits 2019 vor.

Literaturhinweise

Backhaus, U.: Die Größe der Erde und die Entfernung des Mondes. Anregungen zur astronomischen Zusammenarbeit zwischen Schulen. In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 8/2013, S. 18

Federspiel, M.: Wie ich die Mondentfernung bestimme. In: Sterne und Weltraum 2/2008, S. 76–79

Feitzinger, J. V.: Die Mondillusion und der gestauchte Himmel. In: Sterne und Weltraum 11/1996, S. 835–837

Reichert, U.: Das Supermond-Phänomen. In: Sterne und Weltraum 1/2017, S. 34–39

Wagenschein, M.: Wie weit ist der Mond entfernt? Naturphänomene sehen und verstehen. Klett, Stuttgart 1988 ([suw.link/1901-wagenschein](http://www.suw.link/1901-wagenschein))

Dieser Artikel, Weblinks sowie zusätzliche Materialien unter:
www.sterne-und-weltraum.de/artikel/1609254

W I S Didaktische Materialien:
www.wissenschaft-schulen.de/artikel/1051448